5108

МИНИСТЕРСТВО ТРАНСПОРТА РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
ФЕДЕРАЛЬНОЕ АГЕНТСТВО ЖЕЛЕЗНОДОРОЖНОГО ТРАНСПОРТА

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«САМАРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ПУТЕЙ СООБЩЕНИЯ»

Кафедра НТТС

Решения задач размещены на сайте zadachi24.ru

ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ МЕХАНИКА

Методические указания к выполнению контрольных работ
для обучающихся по специальностям
23.05.01 Наземные транспортно-технологические средства,
23.05.03 Подвижной состав железных дорог,
23.05.04 Эксплуатация железных дорог,
23.05.05 Системы обеспечения движения поездов,
23.05.06 Строительство железных дорог, мостов и транспортных тоннелей
и направлениям подготовки
23.03.01 Технология транспортных процессов,
23.03.02 Наземные транспортно-технологические комплексы,
23.03.03 Эксплуатация транспортно-технологических машин и комплексов
очной и заочной форм обучения

Составители: Ю.К. Мустафаев
В.П. Червинский

Самара
2020

УДК 531/534

Теоретическая механика : методические указания к выполнению контрольных работ для обучающихся по специальностям 23.05.01 Наземные транспортно-технологические средства, 23.05.03 Подвижной состав железных дорог, 23.05.04 Эксплуатация железных дорог, 23.05.05 Системы обеспечения движения поездов, 23.05.06 Строительство железных дорог, мостов и транспортных тоннелей и направлениям подготовки 23.03.01 Технология транспортных процессов, 23.03.02 Наземные транспортно-технологические комплексы, 23.03.03 Эксплуатация транспортно-технологических машин и комплексов очной и заочной форм обучения / составители: Ю.К. Мустафаев, В.П. Червинский. – Самара: СамГУПС, 2020. – 32 с.

Методические указания к выполнению контрольных работ составлены в соответствии с программой курса «Теоретическая механика» для студентов всех специальностей очной и заочной формы обучения, изучение которого предусмотрено учебным планом специальности. Объем заданий формируется в соответствии с рабочей программой изучения дисциплины.

В методических указаниях содержатся исходные данные и указания по выбору варианта заданий и выполнению задач контрольной работы. Рассмотрены примеры решения каждой задачи.

Утверждены на заседании кафедры 19.10.2020 г., протокол № 3.
Печатаются по решению редакционно-издательского совета СамГУПС.

Составители: Мустафаев Юрий Кямалович
Червинский Вилен Петрович

Рецензенты: к.т.н, доцент, зав. кафедрой «Электрический транспорт» СамГУПС П.В. Шепелин
к.т.н, доцент, доцент кафедры «Локомотивы» СамГУПС А.А. Свечников

Под редакцией составителей

Подписано в печать 25.12.2020. Формат 60×90 1/16.
Усл. печ. л. 2,0. Заказ 217.

© Самарский государственный университет путей сообщения, 2020

ВВЕДЕНИЕ

Дисциплина «Теоретическая механика» – одна из основных дисциплин, преподаваемых на кафедре «Механика» СамГУПС, являющаяся неотъемлемым звеном в цикле общеобразовательных дисциплин, отвечающих за полноценную подготовку будущего специалиста железнодорожного транспорта. Изучение теоретической механики в виде дисциплин «Теоретическая механика» предусмотрено учебными программами подготовки специалистов следующих специальностей:

23.05.01 Наземные транспортно-технологические средства;

23.05.03 Подвижной состав железных дорог;

23.05.04 Эксплуатация железных дорог;

23.05.05 Системы обеспечения движения поездов;

23.05.06 Строительство железных дорог, мостов и транспортных тоннелей,

а также бакалавров направления подготовки:

23.03.01 Технология транспортных процессов;

23.03.02 Наземные транспортно-технологические комплексы;

23.03.03 Эксплуатация транспортно-технологических машин и комплексов.

Данные методические указания также могут быть рекомендованы в качестве учебно-методического материала при подготовке бакалавров следующих направлений: 08.03.01 Строительство; 15.03.06 Мехатроника и робототехника.

Для успешного освоения дисциплины «Теоретическая механика» от обучающегося требуются знания таких дисциплин, как «Математика», в особенности её разделов «Векторная алгебра», «Аналитическая геометрия», «Дифференциальное и интегральное исчисление», «Физика» (раздел «Механика»). Знания, полученные при изучении данной дисциплины необходимы для дальнейшего успешного обучения таким дисциплинам, как «Теория механизмов и машин», «Сопротивление материалов», «Прикладная механика», «Детали машин» и т.п. Кроме того, существуют ряд дисциплин, посвященных изучению динамики различных машин и сооружений (например, «Основы динамики подвижного состава»), изучение которых базируется на знаниях, приобретённых при изучении «Теоретической механики».

В результате успешного освоения дисциплины студент должен знать законы и методы теоретической механики, уметь применить их в осуществлении проектирования новых машин, конструкций и сооружений, приобрести навыки решения задач статики, кинематики, динамики материальной точки и механической системы, построения математических моделей исследуемых явлений на основе законов теоретической механики.

ОБЩИЕ УКАЗАНИЯ К ВЫПОЛНЕНИЮ КОНТРОЛЬНЫХ РАБОТ

В каждой задаче даётся 10 рисунков и таблица с тем же номером, что и задача. Таблица содержит условия к тексту задачи. Нумерация рисунков двойная. При этом номером рисунка является цифра, стоящая после точки. Например, рис. Д.1.5. – это рис. 5 к задаче Д1 и т. д.

Студент во всех задачах выбирает номер рисунка по **последней** цифре шифра (в номере зачетной книжки), а номер условия в таблице – по **предпоследней**. При выполнении задач записи, рисунки должны быть выполнены аккуратно. Условие задачи и величины, подлежащие определению, приводятся в краткой записи. Решение задач должно сопровождаться всеми необходимыми пояснениями и обосновываться ссылками на соответствующие теоремы или иные теоретические положения, на основе которых производится решение.

На рисунках должны быть приведены все необходимые обозначения, указаны направления векторов, которые определены в результате решения задачи.

ЗАДАНИЯ К КОНТРОЛЬНЫМ И РАСЧЕТНО-ГРАФИЧЕСКИМ РАБОТАМ

Задача С1. Равновесие произвольной плоской системы сил (Определение реакций опор твёрдого тела)

Найти реакции опор конструкции, схема которой изображена на рис. С1.0–С1.9. Необходимые исходные данные представлены в таблице С1.

Таблица С1

Номер	*P*	*F*	*M*	*q*	α	β	γ
условия	кН	кН	кН·м	кН/м	град.	град.	град.
0	10	30	5	20	30	60	45
1	40	20	10	5	60	30	60
2	30	10	25	15	60	45	30
3	20	50	12	10	45	60	45
4	15	15	20	8	60	45	30
5	50	40	30	10	30	60	45
6	25	15	12	40	30	45	60
7	35	20	15	25	60	45	30
8	45	50	22	10	30	60	60
9	60	75	50	30	30	30	30

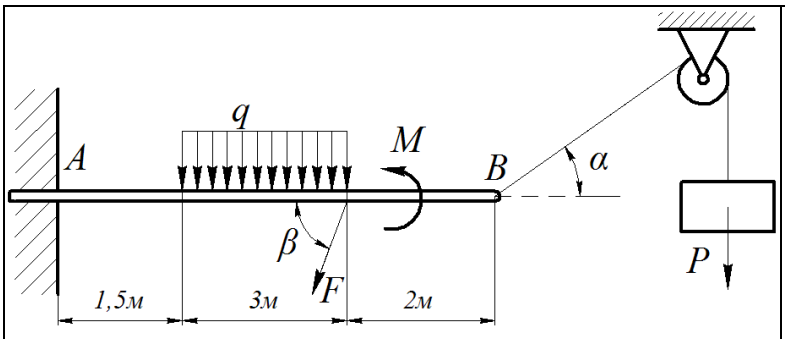

Рис. С1.0

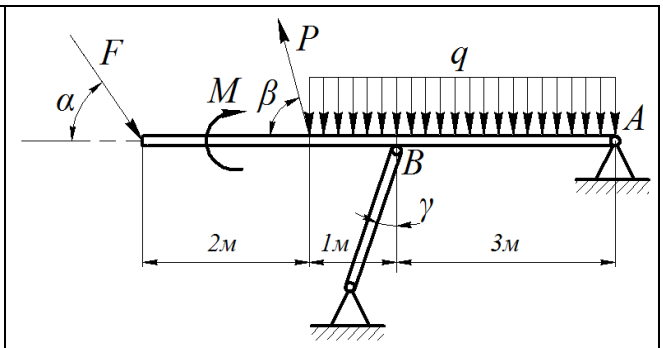

Рис. С1.1

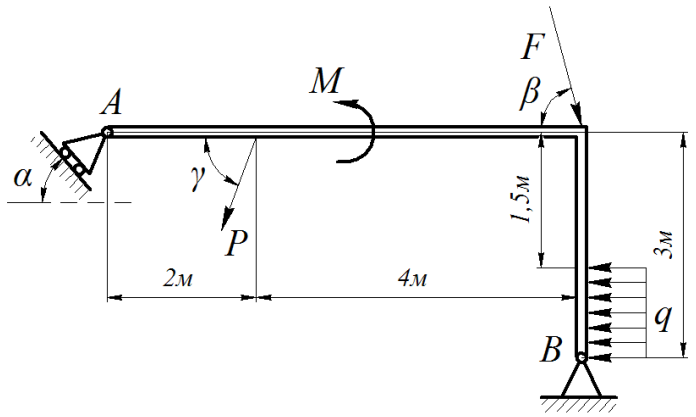

Рис. С1.2

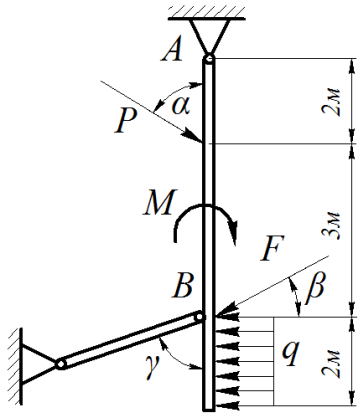

Рис. С1.3

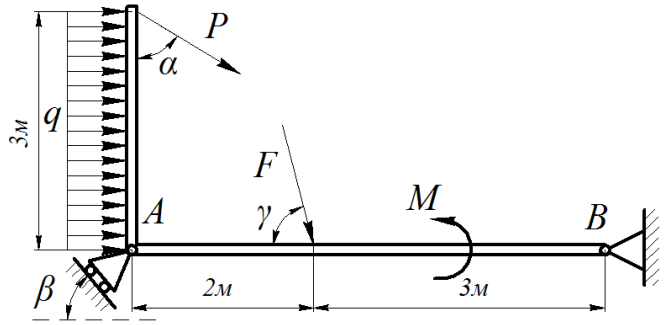

Рис. С1.4

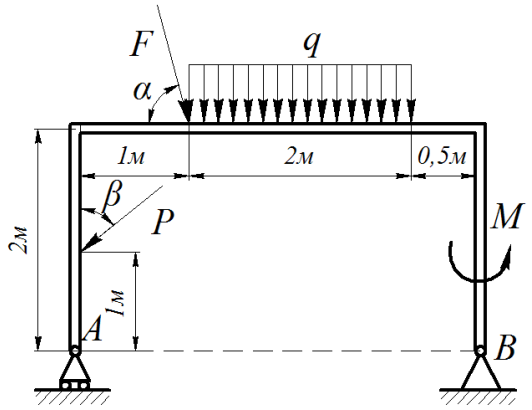

Рис. С1.5

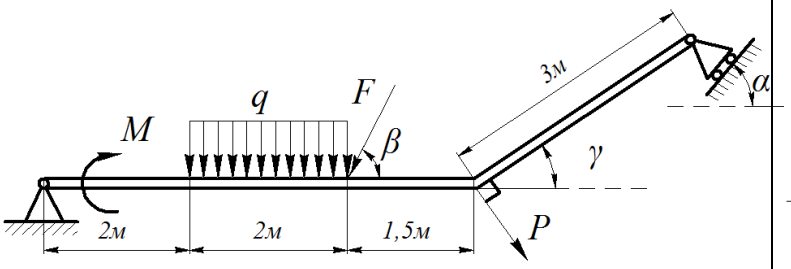

Рис. С1.6

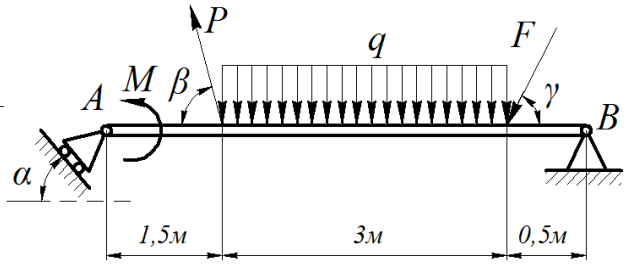

Рис. С1.7

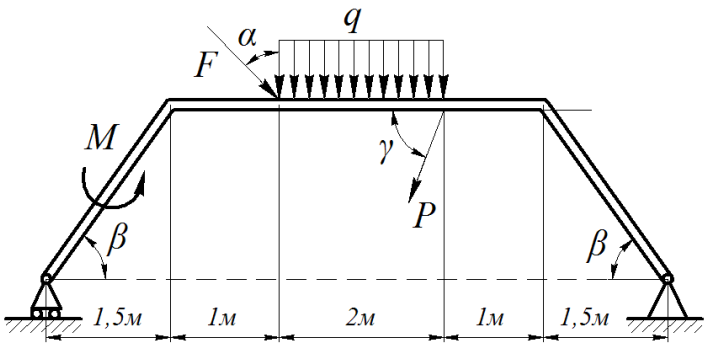

Рис. С1.8

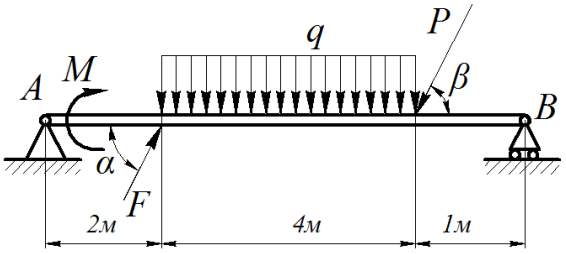

Рис. С1.9

Пример решения задачи С1

Дано: P = 10 кН, Q = 5кН, q = 2 кН/м, M = 3 кН·м, l = 4 м, $\alpha = 60^0$, $\beta = 30^0$.

Определить реакции заделки.

Решение

В точке A балка AB жестко заделана (связь – жесткая заделка) (рис. 1). Такая связь дает множество сил, действующих на заделанный конец балки. Но согласно основной теореме статики произвольная система сил приводится к одной силе (главному вектору) F_A и одной паре – главному моменту M_A. Главный вектор заменим его составляющими X_A и Y_A, направленными произвольно по осям A_x и A_y соответственно (рис. 2). С учетом этого в заделке имеем две силы реакции X_A и Y_A и момент M_A, направление которого указываем тоже произвольно. В точке B связью является нить, к противоположному концу которой прикреплен груз Q, вес которого задан. Поэтому реакция нити равна силе Q и направлена от точки B по нити. Неизвестными являются силы X_A и Y_A и момент M_A.

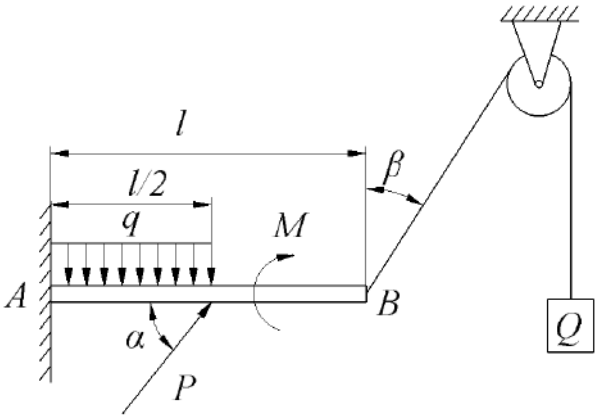

Рис. 1. Расчётная схема

Для равновесия произвольной плоской системы сил необходимо и достаточно, чтобы суммы проекций всех сил на оси координат равнялись нулю и чтобы сумма моментов всех сил относительно точки A тоже равнялась нулю, то есть

$$\sum_{k=1}^{n} F_{kx} = -X_A + P\cos\alpha + Q\sin\beta = 0;$$

$$\sum_{k=1}^{n} F_{ky} = Y_A - q\frac{l}{2} + P\sin\alpha + Q\cos\beta = 0;$$

$$\sum_{k=1}^{n} M_A\left(\overline{F_k}\right) = M_A - q\frac{l}{2}\cdot\frac{l}{4} + P\frac{l}{2}\sin\alpha - M + Ql\cos\beta = 0.$$

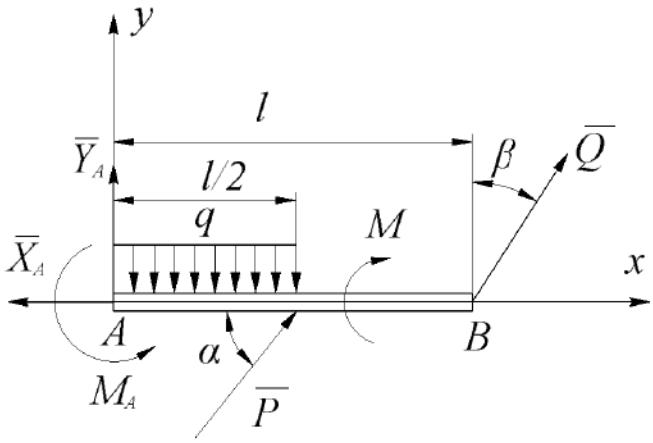

Рис. 2. Конструкция, освобождённая от связей

Из уравнений равновесия, приведенных выше, следует:

$$X_A = P \cdot \cos\alpha + Q \sin\beta;$$

$$Y_A = q\frac{l}{2} - P\sin\alpha - Q\cos\beta\ ;$$

$$M_A = q\frac{l}{2}\cdot\frac{l}{4} - P\sin\alpha\cdot\frac{l}{2} + M - Q\cos\beta\cdot l.$$

После подстановки в эти уравнения численных значений P, Q, q, M, α, β, заданных в условии задачи, получим значения неизвестных:

$X_A = 10\cdot 1/2 + 5\cdot 1/2 = 7{,}5$ кН;

$Y_A = 2\cdot 4/2 - 10\cdot\sqrt{3}/2 - 5\cdot\sqrt{3}/2 = -8{,}99$ кН;

$M_A = 2\cdot 16/8 - 10\cdot 4/2\cdot\sqrt{3}/2 + 3 - 5\cdot 4\cdot\sqrt{3}/2 = -27{,}6$ кН·м.

Задача С2. Определение реакций опор твёрдого тела (пространственная система сил)

Определить значение силы P и реакции опор твёрдого тела, изображённого на рис. С2.0–С2.9. Исходные данные для расчёта представлены в таблице С2.

Таблица С2

Номер условия	Q, кН	F, кН	G, кН	a, м	b, м	c, м	d, м	e, м	r, м	α, град
0	8	4	10	1	2	2	2	1	1	30
1	5	3	12	2	3	1,5	1	1	0,5	45
2	10	5	4	1	1,5	1,5	0,5	2	1	60
3	7	8	5	3	1	1	0,5	1	0,5	60
4	9	10	3	3	2	1,5	1	1,5	1	45
5	4	3	9	2	1	1	1,5	1	0,5	30
6	12	10	8	3	2	1	0,5	1	1	30
7	3	5	10	2	3	1,5	1,5	0,5	0,5	60
8	10	4	15	3	2	1	1	2	0,5	45
9	8	7	9	2	2	1	0,5	1	1	30

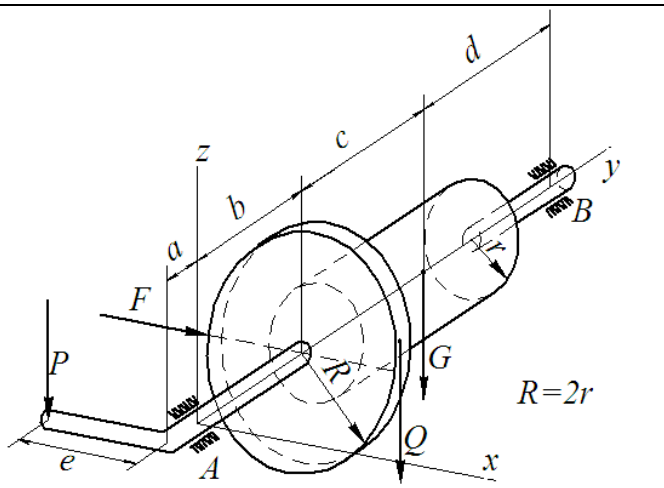

Рис. С2.0

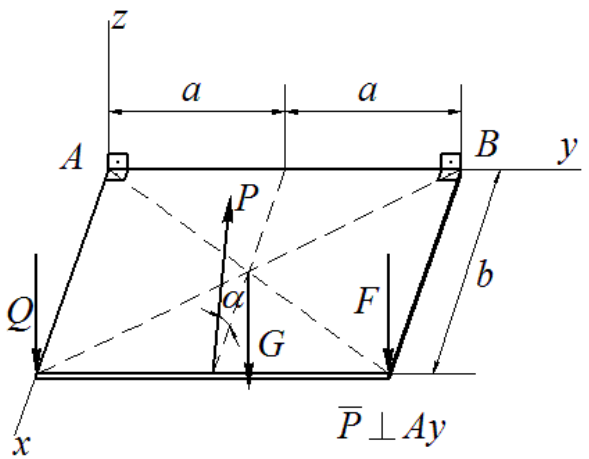

Рис. С2.1

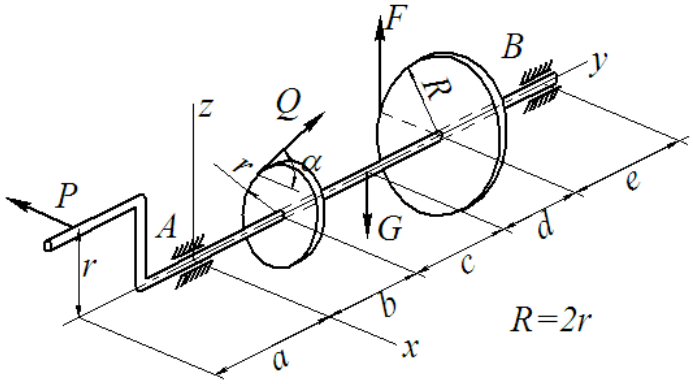

Рис. С2.2

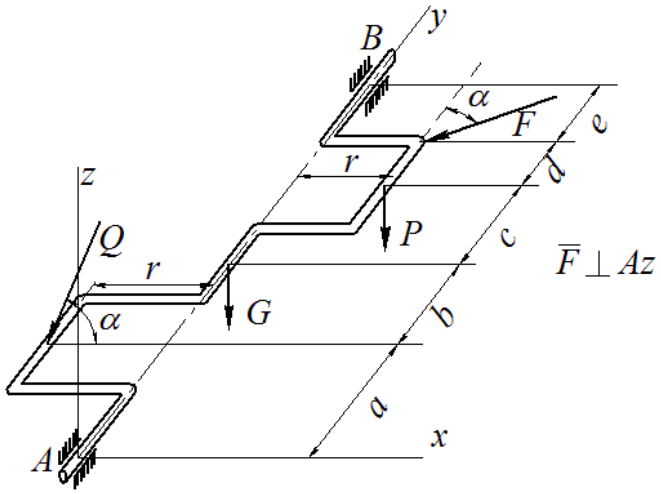

Рис. С2.3

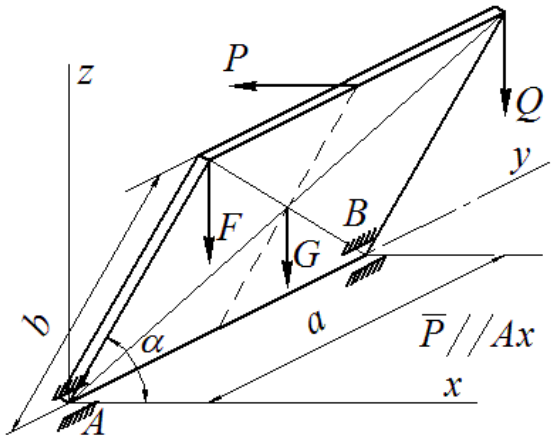

Рис. С2.4

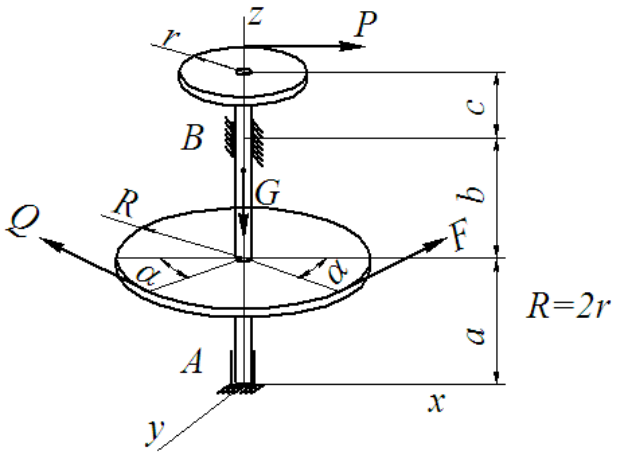

Рис. С2.5

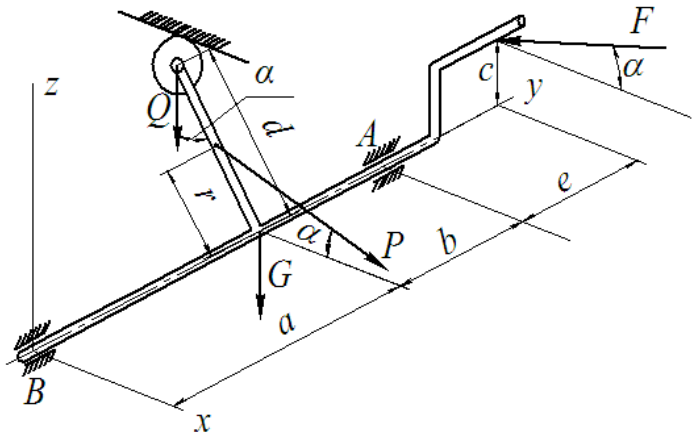

Рис. С2.6

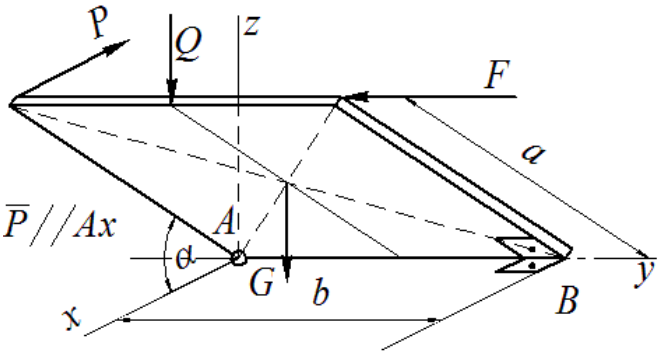

Рис. С2.7

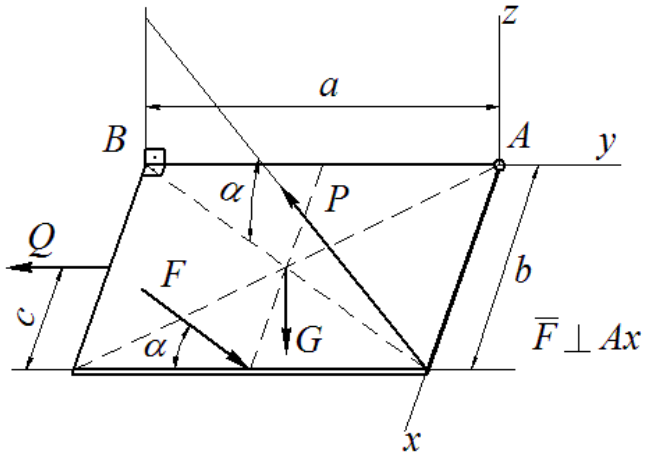

Рис. С2.8

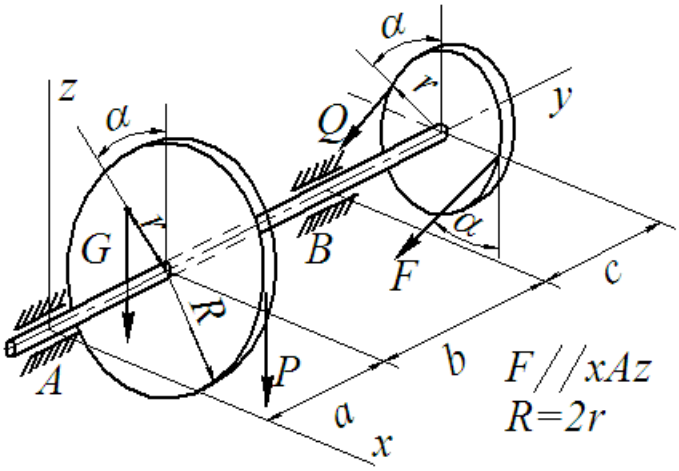

Рис. С2.9

Пример решения задачи С2

Дано: $Q = 50$ Н, $F = 20$ Н, $\alpha = 60^0$, $\beta = 45^0$, $R = 0{,}5$м, $r = 0{,}2$ м.

Определить силу P и реакции подшипников A и B.

Решение

Подшипники представляют связь, которая называется неподвижный цилиндрический шарнир с осью, совпадающей с координатной осью Ay. Трение не учитывается. Поэтому силы реакции этих связей представим в виде составляющих, параллельных осям Ax и Az в точках A и B – это силы $\overline{X}_A$, $\overline{Z}_A$, $\overline{X}_B, \overline{Z}_B$ (рис. 3). Следовательно, всего неизвестных пять: P, X_A, Z_A, X_B, Z_B. Учитывая, что все силы расположены в плоскостях перпендикулярных оси Ay, получим пять уравнений равновесия сил и моментов:

1) $\sum_{k=1}^{n} F_{kx} = X_A + P\cdot\cos\alpha + X_B - F\cdot\cos\beta - Q\cdot\cos\alpha = 0;$

2) $\sum_{k=1}^{n} F_{kz} = Z_A - P\cdot\sin\alpha + Z_B + F\cdot\sin\beta + Q\cdot\sin\alpha = 0;$

3) $\sum_{k=1}^{n} M_x\left(\overline{F}_k\right) = -P\cdot\sin\alpha\cdot 2 + Z_B\cdot 3 + F\cdot\sin\beta\cdot 5 + Q\cdot\sin\alpha\cdot 5 = 0;$

4) $\sum_{k=1}^{n} M_y\left(\overline{F}_k\right) = P\cdot\cos\alpha\cdot r + F\cdot R - Q\cdot R = 0;$

5) $\sum_{k=1}^{n} M_z\left(\overline{F}_k\right) = -P\cdot\cos\alpha\cdot 2 - X_B\cdot 3 + F\cdot\cos\beta\cdot 5 + Q\cdot\cos\alpha\cdot 5 = 0.$

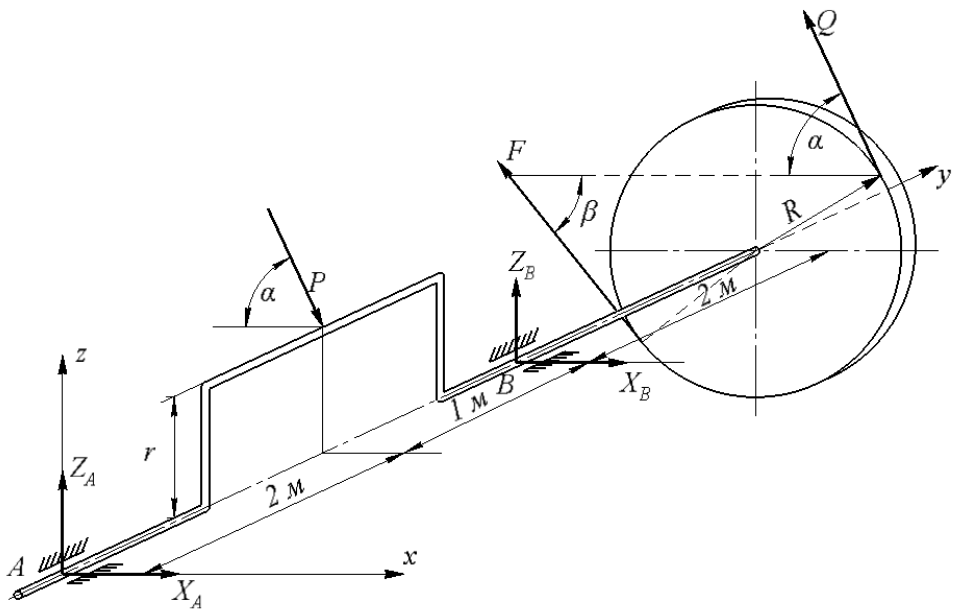

Рис. 3. Пространственная конструкция, находящаяся в равновесии под действием произвольной пространственной системы сил

Анализируя эти уравнения, видим, что одну неизвестную содержит только четвертое уравнение. Поэтому последовательность решения следующая. Из четвертого уравнения находим P:

$P = (1/(r\cdot\cos\alpha))\cdot(Q\cdot R - F\cdot R) = (1\cdot 2/(0{,}2\cdot 1))\cdot(50 - 20)\cdot 1/2 = 150$ Н.

Из пятого уравнения найдем X_B:

$X_B = (1/3)\cdot(-2P\cdot\cos\alpha+5\cdot F\cdot\cos\beta+5\cdot Q\cdot\cos\alpha) = 0{,}33\cdot(-2\cdot 150\cdot 0{,}5+5\cdot 20\cdot\sqrt{2}/2 +5\cdot 50\cdot 0{,}5) = 15$ Н.

Из первого уравнения найдем X_A:

$X_A = -P\cdot\cos\alpha - X_B + F\cdot\cos\beta + Q\cdot\cos\alpha = -150\cdot 0{,}5 - 15 +20\cdot\sqrt{2}/2 + 50\cdot 0{,}5 = -51$ Н.

Из третьего уравнения найдем Z_B:

$Z_B = (1/3)\cdot(2\cdot P\cdot\sin\alpha - 5\cdot F\cdot\sin\beta - 5\cdot Q\cdot\sin\alpha) = (1/3)\cdot(2\cdot 150\cdot\sqrt{3}/2 - 5\cdot 20\cdot\sqrt{2}/2 - 5\cdot 50\cdot\sqrt{3}/2) = -8{,}9$ Н.

Из второго уравнения найдем Z_A:

$Z_A = P\cdot\sin\alpha - Z_B - F\cdot\sin\beta - Q\cdot\sin\alpha = 150\cdot\sqrt{3}/2 +8{,}9 -20\cdot\sqrt{2}/2 - 50\cdot\sqrt{3}/2 = 81{,}4$ Н.

Проверка:

$$\sum_{k=1}^{n} M_y\left(\overline{F}_k\right) = 150\cdot 0{,}5\cdot 0{,}2+20\cdot 0{,}5-50\cdot 0{,}5 = 0.$$

Задача К1. Кинематика плоских механизмов

Задача К1 является комбинированной. Она охватывает вопросы кинематики точки, поступательного, вращательного и плоского движения твердого тела. Приступая к решению задачи, необходимо изучить теоретический материал, примеры и задачи по темам, указанным выше. Особо обратить внимание на естественный способ задания движения точки и определение ее скорости в этом способе; на способы определения положения мгновенного центра скоростей при плоском движении тела и применение его для определения скоростей других точек этого тела; на применение теоремы о проекциях скоростей двух точек тела на прямую, их соединяющую. Кроме того, следует при решении задач обратить внимание на то, что скорости контактирующих точек тел будут равны (считаем, что проскальзывание отсутствует).

Условие задачи. Плоский кривошипно-шатунный механизм связан с системой зубчатых колес, насаженных на неподвижные оси, которые приводятся в движение ведущим звеном (зубчатая рейка – схема К1.0; рукоятка – схема К1.1; груз на нити – схема К1.2 и т. д.). Рукоятка O_1A и кривошип O_2C жестко связаны с соответствующими колесами. Длина кривошипа $O_2C = L_1$, шатуна $CD = L_2$.

Схемы механизмов приведены на рис. К1.0–К1.9, а размеры и уравнения движения точки A ведущего звена $S = f(t)$ – в таблице К2. В начальный момент направление кривошипа совпадает с осью x.

Требуется определить в заданном положении механизма угловые скорости колес ω_1 и ω_2, уравнение вращения кривошипа $\varphi = f(t)$ и время t_1, соответствующее заданному положению кривошипа, скорость v_B и ускорение a_B точки B колеса, скорость v_D, v_M и

ускорение a_D, a_M точек D и M шатуна соответственно, угловую скорость ω_{DC} и угловое ускорение ε_{DC} шатуна.

Таблица К1

Исходные данные								
Вариант	Размеры звеньев и углы в заданном положении механизма							Закон движения точки A ведущего звена $s = f(t)$
	r_1,м.	r_2,м.	L_1, м.	L_2, м.	MC, м.	φ, град.	β, град.	
0	0,3	0,2	0,4	0,5	0,3	60	150	$0{,}2\pi t^2$
1	0,4	0,3	0,5	0,4	0,25	30	210	$0{,}3\pi t^2$
2	0,2	0,15	0,35	0,3	0,2	90	60	$0{,}15\pi t^2$
3	0,5	0,3	0,4	0,3	0,1	45	195	$0{,}1\pi t^2$
4	0,35	0,25	0,6	0,4	0,3	30	90	$0{,}25\pi t^2$
5	0,15	0,1	0,2	0,3	0,1	60	90	$0{,}1\pi t^2$
6	0,25	0,2	0,3	0,4	0,15	45	105	$0{,}4\pi t^2$
7	0,6	0,5	0,7	0,8	0,3	90	150	$0{,}5\pi t^2$
8	0,45	0,35	0,5	0,6	0,2	45	75	$0{,}35\pi t^2$
9	0,7	0,4	0,8	1,0	0,4	60	75	$0{,}4\pi t^2$

Схемы к задаче К1

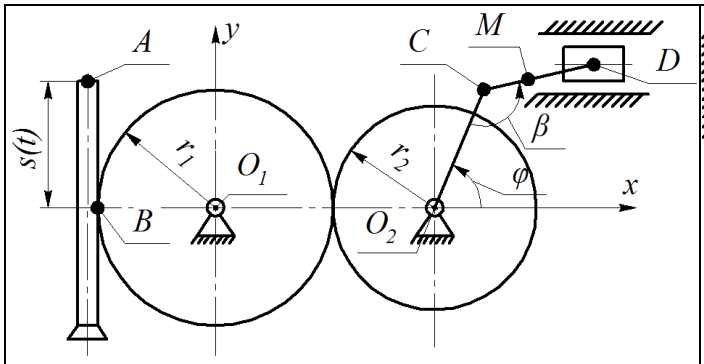

Рис. К1.0

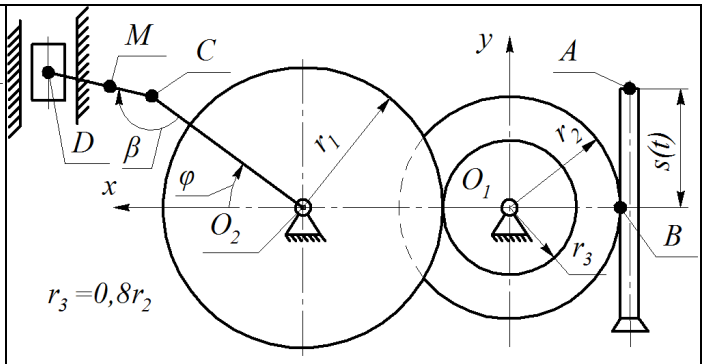

Рис. К1.1

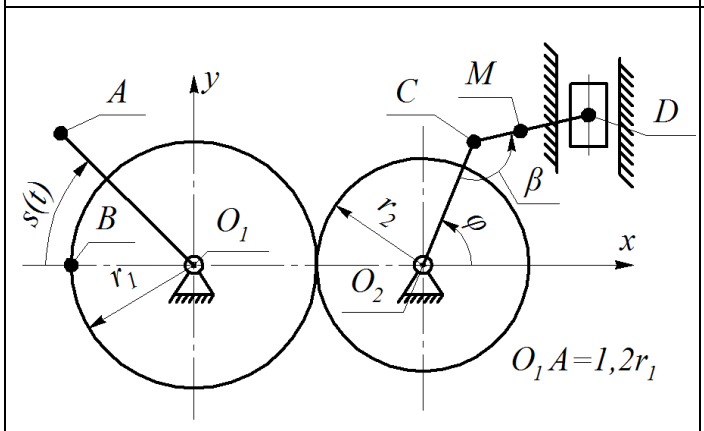

Рис. К1.2

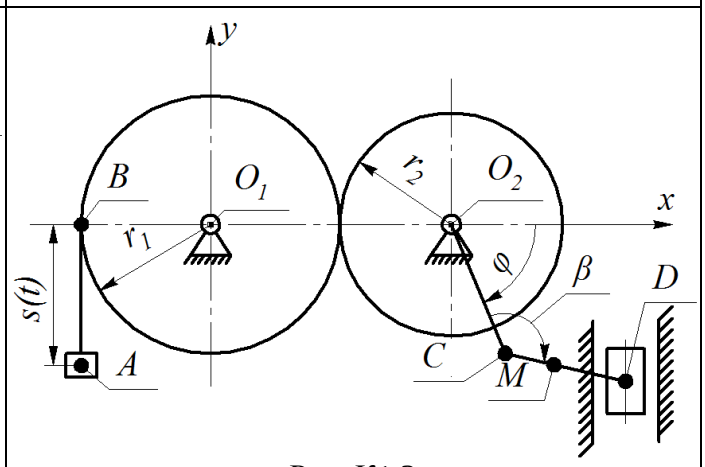

Рис. К1.3

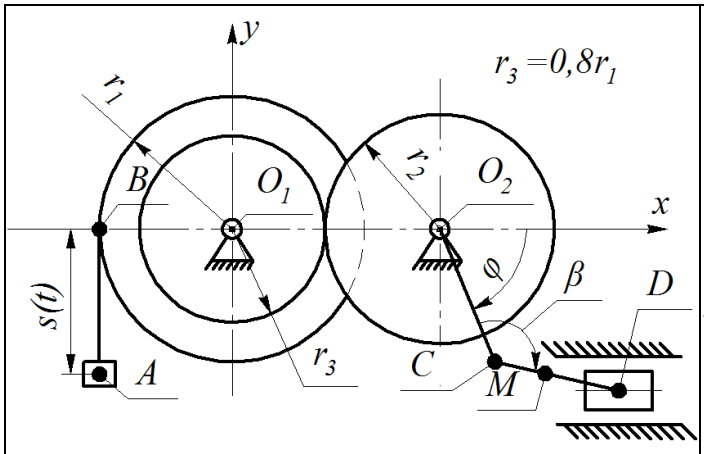

Рис. К1.4

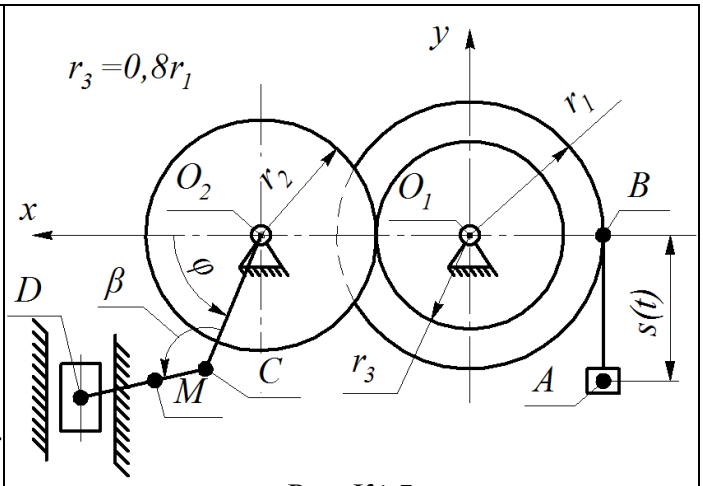

Рис. К1.5

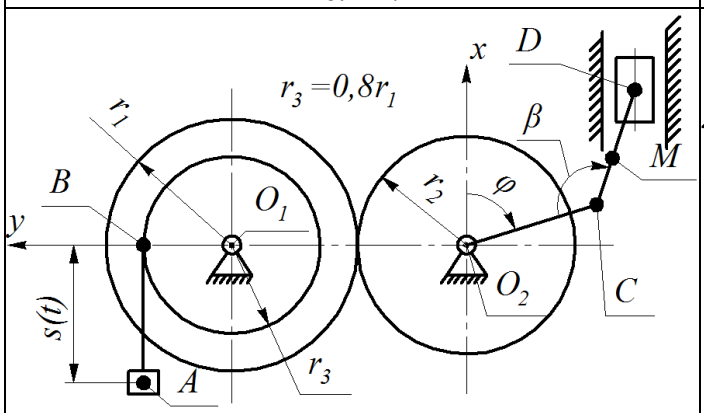

Рис. К1.6

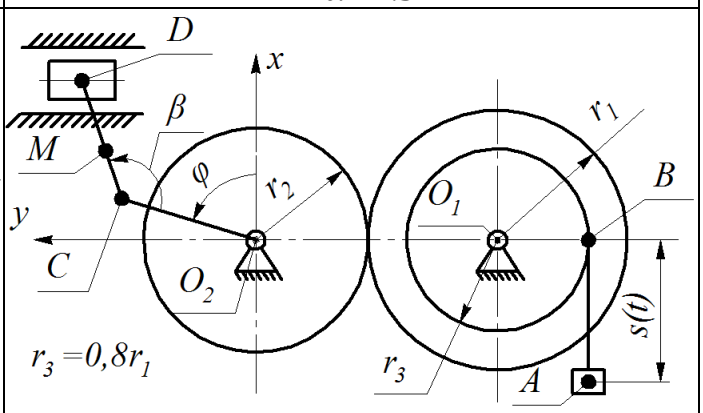

Рис. К1.7

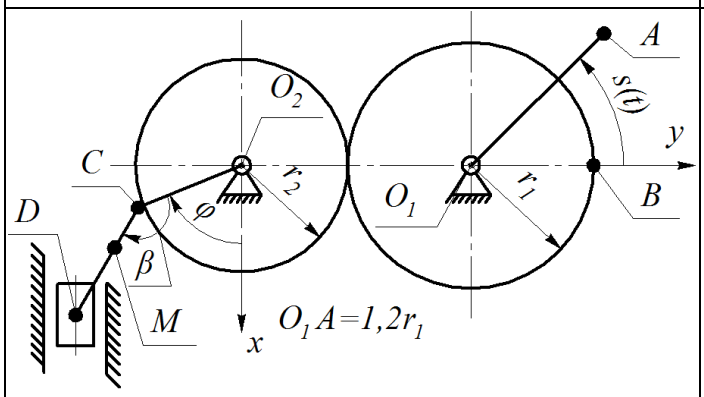

Рис. К1.8

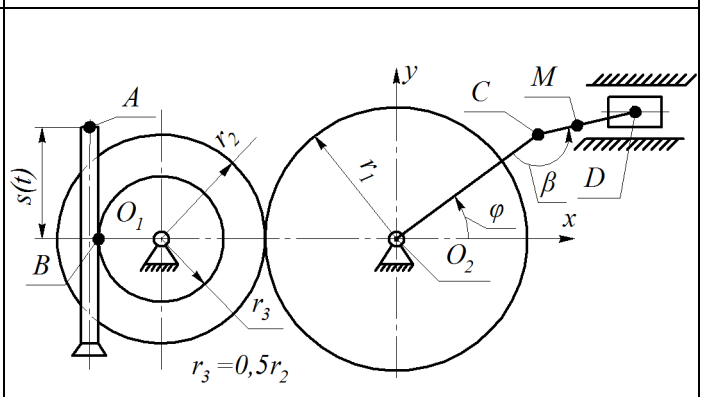

Рис. К1.9

Пример решения задачи К1

Схема механизма приведена на рис. 4.

Дано: $r_1 = 0,5$ м; $r_2 = 0,3$ м; $r_3 = 0,6$ м;

$L_1 = 0,4$ м; $L_2 = 1,0$ м; $CM = 0,2$ м;

$\varphi = 30$ °; $\beta = 90$ °.

Закон движения точки A рукоятки: $s = (\pi / 3) \cdot t_2$, м.

Определить: ω_1, ω_2, v_B, a_B, $\varphi = f(t)$, t_1, v_D, a_D, v_M, a_M, ω_{CD}, ε_{DC}.

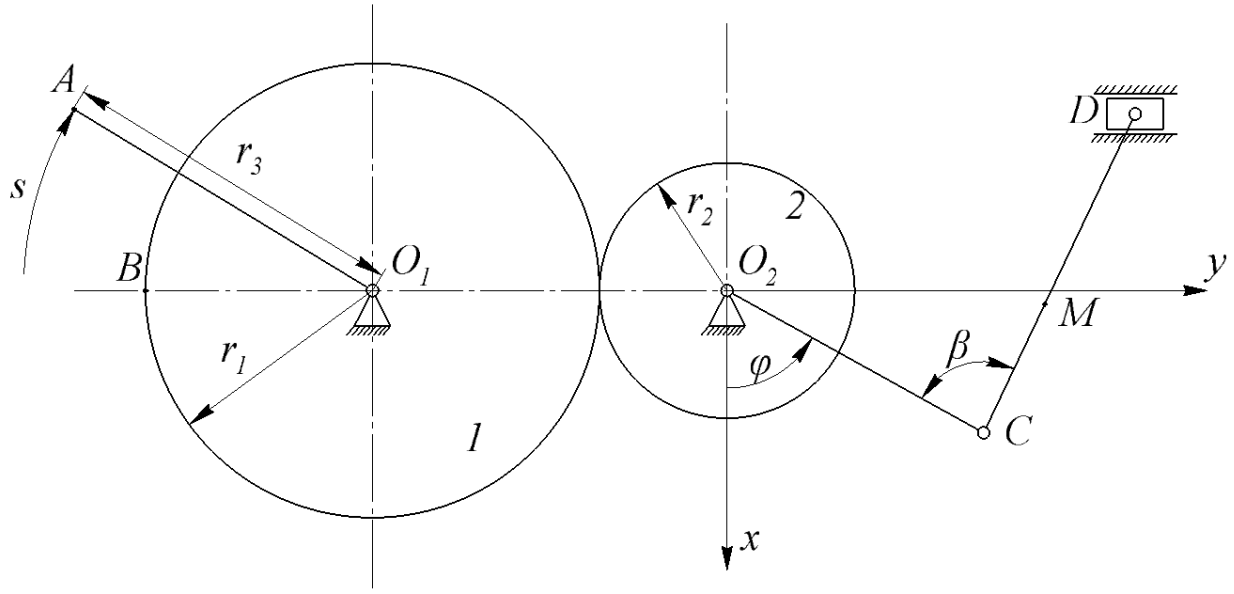

Рис. 4. Расчётная схема плоского механизма

Решение

1. Рукоятка O_1A жёстко связана с колесом 1, поэтому ее угловая скорость равна ω_1, а линейная скорость точки A равна $v_A = \omega_1 \cdot r_3$, откуда

$$\omega_1 = \frac{v_A}{r_3}. \qquad (1)$$

С другой стороны, уравнение движения точки A задано естественным способом:

$$s = \frac{\pi}{3}t^2,$$

поэтому скорость точки A

$$v_A = \frac{ds}{dt} = \frac{2}{3}\pi t. \qquad (2)$$

Из (1) и (2) находим

$$\omega_1 = \frac{2\pi}{3r_3}t. \qquad (3)$$

Для определения ω_2 запишем выражение скорости точки касания колес K, рассматривая ее принадлежащей каждому из колес:

$$v_K = \omega_1 r_1, \;\; v_K = \omega_2 r_2.$$

Приравнивая скорости, находим

$$\omega_2 = \omega_1 \frac{r_1}{r_2},$$

или, с учетом (3)

$$\omega_2 = \frac{2r_1\pi}{3r_2r_3}t.$$

Так как время движения механизма в заданное положение нам пока неизвестно, то, подставив значения радиусов, получим выражение угловых скоростей в общем виде. С

учетом общепринятого правила знаков, вращение против хода часовой стрелки считается положительным:

$$\omega_1 = -1{,}1\pi t \text{ (рад/с)}; \quad \omega_2 = 1{,}83\pi t \text{ (рад/с)}. \qquad (4)$$

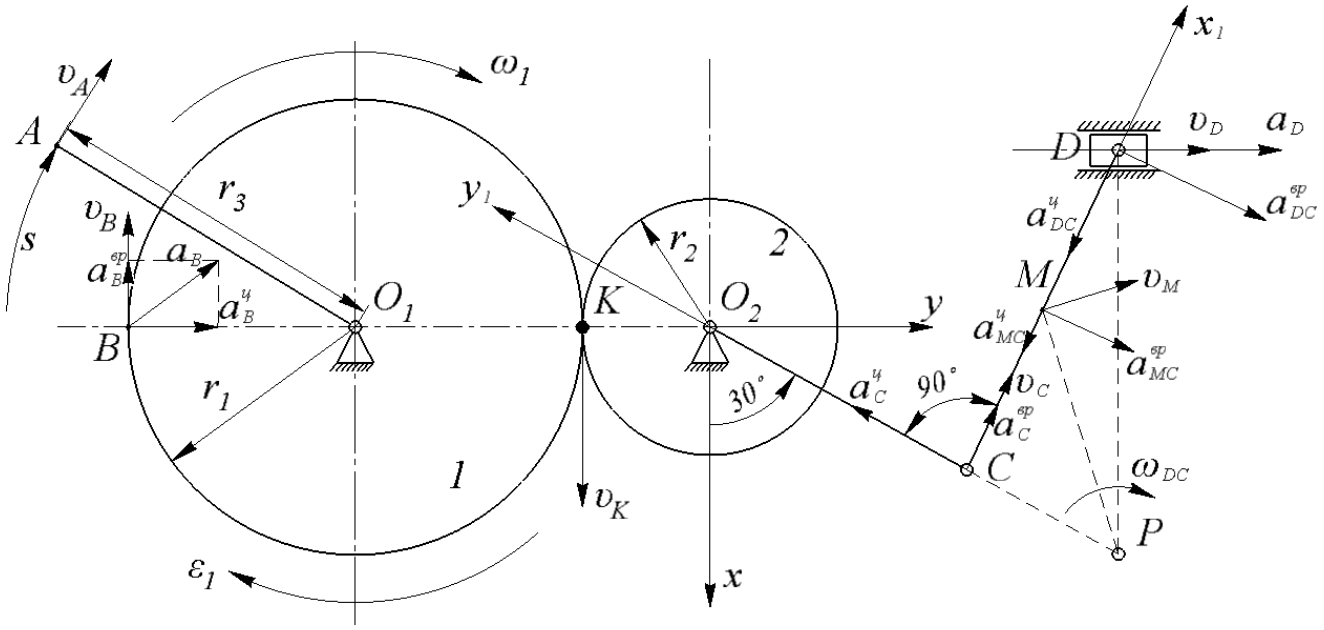

Рис. 5. Расчетная схема с параметрами движения точек и тел

Найдем уравнение движения кривошипа. Учитывая, что он жестко связан с колесом 2, запишем:

$$\omega_2 = \frac{d\varphi}{dt},$$

откуда находим:

$$\varphi = \int \omega_2 dt = \int 1{,}83\pi t dt = 0{,}915\pi t^2 + C_1. \qquad (5)$$

Постоянную C_1 определяем по начальным условиям: при $t = 0$ кривошип совпадал с направлением оси x, поэтому $\varphi_0 = 0$. Подставляя в (5), получим $C_1 = 0$, и уравнение вращения кривошипа имеет вид

$$\varphi = 0{,}915\pi t^2. \qquad (6)$$

Определим t_1 – время движения механизма в заданное положение, положив значение угла φ равным заданному, т.е. $\varphi = 30^o$ или $\varphi = \pi/6$. Из уравнения (6) находим, что $t_1 = 0{,}43$ с, т.к. время считается положительным. Подставляя t_1 в (4), получим значения угловых скоростей в заданном положении:

$$\omega_1 = -1{,}48 \text{ рад/с}; \quad \omega_2 = 2{,}47 \text{ рад/с}.$$

Направление вращения колес показано стрелками на рис. 5.

3. Определим скорость и ускорение точки B колеса 1. По модулю скорость точки B колеса определяется выражением

$$v_B = |\omega_1| r_1.$$

В момент времени $t = t_1$ получим $v_B = 0{,}344$ м/с.

Вектор скорости v_B направлен в сторону вращения колеса перпендикулярно радиусу (рис. 5).

Ускорение точки B равно векторной сумме вращательного и центростремительного ускорений:

$$\vec{a}_B = \vec{a}_B^{вр} + \vec{a}_B^{ц}.$$

Величины вращательной и центростремительной составляющих вектора a_B вычисляются по формулам:

$$a_B^{вр} = \varepsilon_1 r_1; \qquad (7)$$

$$a_B^{ц} = \omega_1^2 r_2.$$

Угловое ускорение ε_1 определим, дифференцируя по времени первое выражение в (4)

$$\varepsilon_1 = \frac{d\omega_1}{dt} = -1{,}1\pi = -3{,}45\ (\text{рад/с}^2).$$

Т.к. знаки ω_1 и ε_1 совпадают, то вращение колеса будет ускоренным, и направление вращательной составляющей ускорения $\vec{a}_B^{вр}$ совпадает с направлением скорости v_B. Центростремительная составляющая ускорения $\vec{a}_B^{ц}$ всегда направлена к оси вращения (рис. 5).

Подставляя в (7) численные значения ε_1, ω_1, r_1 находим

$$a_B^{вр} = 1{,}72(\text{м/с}^2),\ \ a_B^{ц} = 1{,}09(\text{м/с}^2).$$

Тогда модуль полного ускорения

$$a_B = \sqrt{(a_B^{вр})^2 + (a_B^{ц})^2} = \sqrt{1{,}72^2 + 1{,}09^2} = 2{,}04(\text{м/с}^2).$$

4. Переходим к определению скорости и ускорения точек D и M шатуна DC.

Определение скорости точек *D* и *M*

Для определения скорости точки D воспользуемся теоремой о равенстве проекций скоростей двух точек плоской фигуры на прямую, соединяющую точки. Действительно, направление скоростей точек D и C шатуна известны, кроме того, может быть найден и модуль скорости v_C точки C. Если рассматривать точку C как точку, принадлежащую кривошипу O_2C, жестко связанному с колесом 2, то по модулю величина $v_C = \omega_2 \cdot O_2C$ или для $t = t_1$ $v_C = 2{,}47 \cdot 0{,}4 \approx 0{,}99$ м/с.

Так как вектор скорости v_C направлен перпендикулярно кривошипу O_2C в сторону его поворота, то вектор v_C направлен вдоль шатуна CD. Вектор скорости v_D точки D направлен вдоль направляющих ползуна (см. рис. 5). Проецируя векторы скоростей на прямую CD, получим $v_C = v_D \cdot \cos 30^\circ$.

Отсюда находим $v_D = v_C / \cos 30^\circ = 1{,}14$ м/с.

Скорость точки M определим с помощью мгновенного центра скоростей. Если за полюс в теореме о сложении скоростей принять мгновенный центр скоростей, то скорость любой точки плоской фигуры можно рассматривать как вращательную при

мгновенном повороте плоской фигуры вокруг мгновенного центра скоростей. Положение мгновенного центра скоростей определим как точку P пересечения перпендикуляров, проведенных в точках C и D к направлению скоростей этих точек. Запишем выражения, определяющие модули скоростей точек D и M

$$vD = \omega DC \cdot PD, \quad vM = \omega DC \cdot PM. \tag{8}$$

Из первого равенства (24) найдем угловую скорость ω_{DC} шатуна при $t = t_1$

$$\omega_{DC} = v_D / PD = 1{,}14 / 2 = 0{,}57 \text{ рад/с},$$

а из второго – скорость точки M:

$$v_M = \omega_{DC}\sqrt{CM^2 + CP^2} = 0{,}57\sqrt{0{,}2^2 + 3} \approx 1 \text{ м/с}.$$

Скорость v_M направлена по нормали к прямой MP в сторону поворота шатуна CD (рис. 5).

Определение ускорений точек *D* и *M*

Выберем за полюс точку C, ускорение которой можно определить. Согласно теореме сложения ускорений, ускорение любой точки плоской фигуры, например, точки D, теперь определится по формуле

$$\vec{a}_D = \vec{a}_C + \vec{a}_{DC}, \tag{9}$$

где a_C – ускорение полюса; $\vec{a}_{DC} = \vec{a}^{\,ц}_{DC} + \vec{a}^{\,вр}_{DC}$ – ускорение точки D во вращательном движении плоской фигуры вокруг полюса.

Модули составляющих ускорения a_{DC} вычисляются по формулам:

$$a^{ц}_{DC} = \omega^2_{DC} \cdot DC = \omega^2_{DC} \cdot l_2; \quad a^{вр}_{DC} = \varepsilon_{DC} \cdot DC = \varepsilon_{DC} \cdot l_2. \tag{10}$$

Ускорение полюса C, если рассматривать его как точку, принадлежащую кривошипу, совершающему вращательное движение, также определяется двумя составляющими

$$\vec{a}_C = \vec{a}^{\,ц}_C + \vec{a}^{\,вр}_C,$$

модули которых равны:

$$a^{ц}_C = \omega^2_2 \cdot O_2C = \omega^2_2 \cdot l_1; \quad a^{вр}_C = \varepsilon_2 \cdot O_2C = \varepsilon_2 \cdot l_1. \tag{11}$$

Величину ε_2 найдем, дифференцируя по времени выражение ω_2 в (4)

$$\varepsilon_2 = \frac{d\omega_2}{dt} = 1{,}83\pi = 5{,}74 \text{ (рад/с}^2\text{)}.$$

Так как знаки ω_2 и ε_2 совпадают, то вращение второго колеса, а, следовательно, и кривошипа, ускоренное, т.е. направление вектора $\vec{a}^{\,вр}_C$ будет совпадать с направлением вектора v_C. Вектор $\vec{a}^{\,ц}_C$ направлен к оси вращения кривошипа. Подставляя в (11) числовые значения при $t = t_1$ получим

$$a^{ц}_C = 4{,}04 \text{ (м/с}^2\text{)}; \qquad a^{вр}_C = 2{,}87 \text{ (м/с}^2\text{)}.$$

В уравнениях (26) можно определить только величину $a^{ц}_{DC}$, так как ε_{DC} пока неизвестно. Подставляя числовые значения ω_{DC} и L_2, получим

$$a^{ц}_{DC} = 0{,}32 \text{ (м/с}^2\text{)}.$$

Вектор $\vec{a}_{DC}^{ц}$ направлен от точки D к полюсу C. Таким образом, в уравнение (9) входят две неизвестные по модулю величины $\vec{a}_D$ и $\vec{a}_{DC}^{вр}$; линии, по которым эти векторы направлены, известны. Зададим направление этих векторов как указано на рис. 5. Теперь спроецируем уравнение (9) на выбранные направления координатных осей x и y, получим два уравнения, в которые войдут два неизвестных. Проецируя на ось x, получим

$$0 = -a_C^{ц} \cdot \cos 30^\circ - a_c^{вр} \cdot \cos 60^\circ + a_{DC}^{ц} \cdot \cos 60^\circ + a_{DC}^{вр} \cdot \cos 30^\circ, \qquad (12)$$

на ось y

$$a_D = -a_C^{ц} \cdot \cos 60^\circ + a_c^{вр} \cdot \cos 30^\circ - a_{DC}^{ц} \cdot \cos 30^\circ + a_{DC}^{вр} \cdot \cos 60^\circ. \qquad (13)$$

Из уравнения (12) находим $a_{DC}^{вр} = 5{,}51\,(\text{м/с}^2)$, из уравнения (13) $-a_D = 3{,}69\,(\text{м/с}^2)$. Так как знаки положительны, то направления векторов a_D и $a_{DC}^{вр}$ выбраны правильно.

Теперь из формулы (10) найдем угловое ускорение $\varepsilon_{DC} = 5{,}51\,(\text{рад/с}^2)$ и запишем для определения ускорения точки M формулу

$$\vec{a}_M = \vec{a}_C^{ц} + \vec{a}_C^{вр} + \vec{a}_{MC}^{ц} + \vec{a}_{MC}^{вр}. \qquad (14)$$

Модули составляющих $a_{MC}^{ц}$ и $a_{MC}^{вр}$ определены по формулам, аналогичным (10)

$$a_{MC}^{ц} = \omega_{DC}^2 \cdot MC = 0{,}57^2 \cdot 0{,}2 = 0{,}065\,(м/с^2),$$

$$a_{MC}^{вр} = \varepsilon_{DC} \cdot MC = 5{,}51 \cdot 0{,}2 = 1{,}1\,(м/с^2).$$

Введем оси x_1 и y_1, направленные вдоль шатуна и перпендикулярно ему, и спроецируем на них ускорение a_M, полученное в уравнении (14):

на ось x_1: $a_{Mx_1} = a_C^{вр} - a_{MC}^{ц} = 2{,}87 - 0{,}065 = 2{,}8\,(м/с^2)$,

на ось y_1: $a_{My_1} = a_C^{ц} - a_{MC}^{вр} = 4{,}04 - 1{,}1 = 2{,}94\,(м/с^2)$.

Модуль ускорения a_M точки M равен

$$a_M = \sqrt{a_{Mx_1}^2 + a_{My_1}^2} = \sqrt{2{,}8^2 + 2{,}94^2} = 4{,}06\,(м/с^2).$$

Задача К2. Сложное движение точки

По заданному уравнению вращения $\varphi = f_1(t)$ тела A и уравнению движения $s = OM = f_1(t)$ точки M относительно тела A определить абсолютную скорость и абсолютное ускорение точки M в момент времени $t = t_1$. Схема к задаче и исходные данные к ней определяются в соответствии с шифром по рис. К2.0–К2.9 и таблице К2. Точка M показана в направлении положительного отсчета координаты s. Положительное направление отсчета угла φ указано стрелкой.

Таблица К2

Номер условия	Уравнение вращения тела A $\varphi = f_1(t)$, рад	Уравнение относительного движения точки $S = f_2(t)$, см	t_1, см	R, см
0	$2t+4t^2$	$20\sin \pi t/6$	1	$30/\pi$
1	$3t - 0,5t^3$	$10\sqrt{2}\cos \pi t/2$	1/2	$40/\pi$
2	$5t^3$	$5\sqrt{3}\sin \pi t$	1/3	$45/\pi$
3	$2t^2+4t^3$	$20\sqrt{2}\cos \pi t$	1/4	$40/\pi$
4	$8t - 3t^2$	$5\pi t(3+10t)$	1/5	20
5	$4t^2$	$15\sqrt{2}\sin 5/8\pi t$	2/5	$45/\pi$
6	$10t - 3t^2$	$8\sqrt{3}\sin\pi t$	2/3	$36/\pi$
7	$4t+5t^3$	$3\pi t^3$	2	48
8	$5t - 2t^3$	$8\pi t(1+2t)$	3/4	60
9	$3t - 4t^2$	$12\cos 8/3\pi t$	1/8	$36/\pi$

Схемы к задаче К2

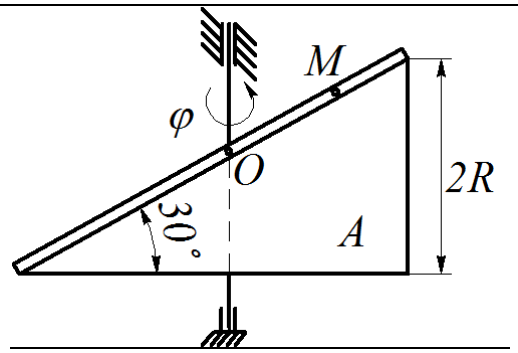

Рис. К2.0

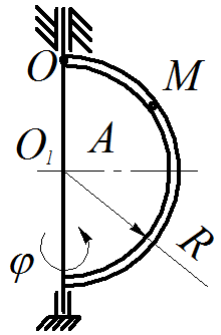

Рис. К2.1

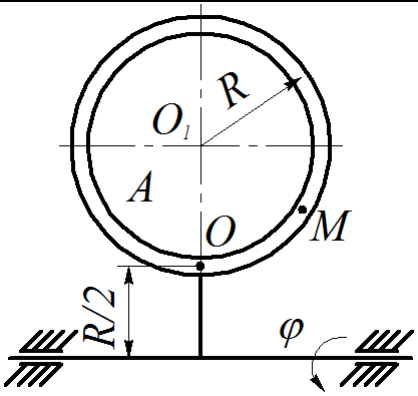

Рис. К2.2

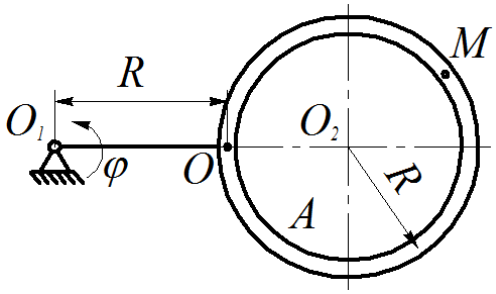

Рис. К2.3

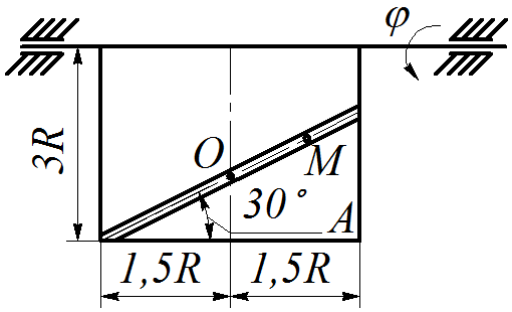

Рис. К2.4

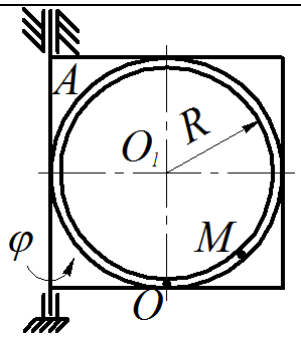

Рис. К2.5

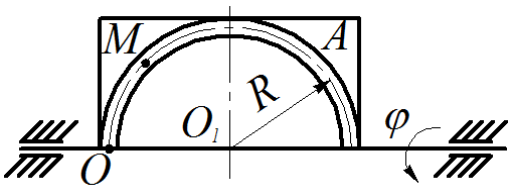

Рис. К2.6

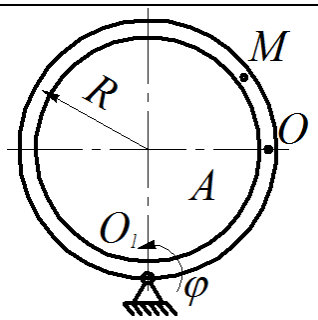

Рис. К2.7

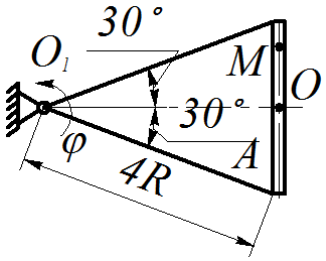

Рис. К2.8

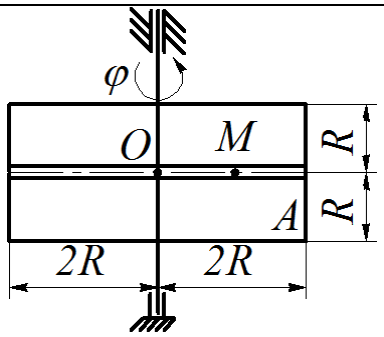

Рис. К2.9

Пример решения задачи К2

При решении задачи К2 необходимо определить, какое движение точки будет относительным, а какое переносным. Скорость и ускорение точки в относительном движении в этой задаче определяются методами кинематики точки, а в переносном – кинематики твердого тела.

Схема к задаче приведена на рис. 6.

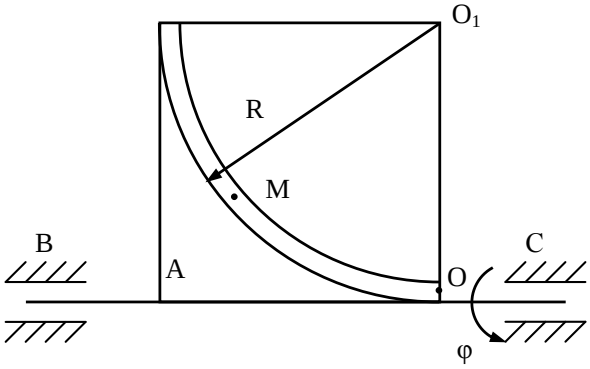

Рис. 6. Исходная расчётная схема

Исходные данные: уравнение вращения тела *A* задано в виде $\varphi = 4t - 5t^3$, а уравнение движения точки *M* относительно тела *A*

$$s = 12\sqrt{2}\sin\frac{\pi \cdot t}{4}\,\text{см};$$

$$R = \frac{36}{\pi}\,\text{см}.$$

Определить абсолютную скорость $\vec{v}_M$ и абсолютное ускорение $\vec{a}_M$ точки *M* при $t = t_1 = 1$ с.

Решение

Точка M совершает сложное движение. Относительным движением точки M является движение относительно тела A, переносным – вращение тела A вокруг оси BC. Свяжем с телом A подвижную систему координат, направив ось x перпендикулярно плоскости рисунка на нас (рис. 7).

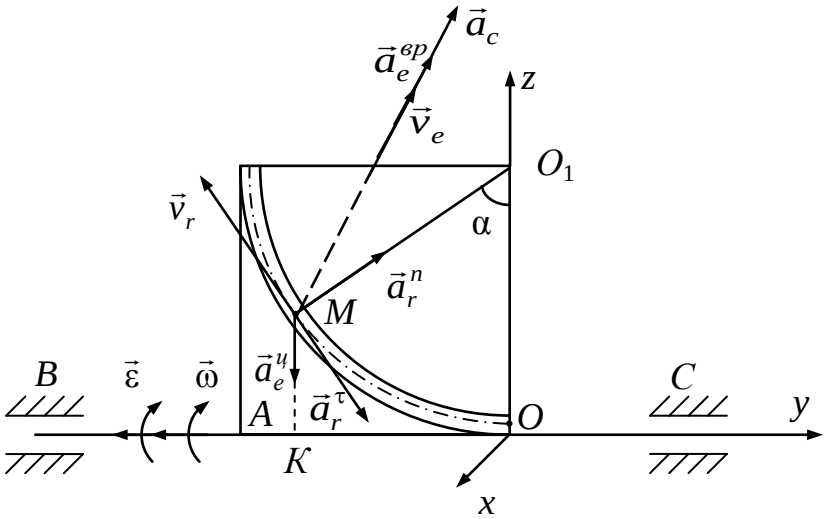

Рис. 7

Положение точки M в момент времени $t = t_1 = 1$ с определим углом α, на который повернется радиус, проведенный из центра O_1 в точку M, за время движения.

$$\alpha = \frac{s}{R} = \frac{12\sqrt{2}\sin\frac{\pi}{4}}{36}\cdot\pi = \frac{\pi}{3}\,рад = 60^\circ .$$

Абсолютная скорость точки M равна геометрической сумме относительной и переносной скоростей:

$$\vec{v}_M = \vec{v}_r + \vec{v}_e .$$

Движение точки M относительно тела A задано естественным способом, поэтому относительную скорость определяем из формулы

$$v_r = \frac{ds}{dt} = 12\sqrt{2}\frac{\pi}{4}\cos\frac{\pi t}{4} = 3\sqrt{2}\pi\cos\frac{\pi t}{4},$$

при $t_1 = 1$ с $v_r = 3\pi = 9{,}4$ см/с.

Так как знак скорости положителен, то вектор $\vec{v}_r$ направлен в сторону возрастания координаты s (положительное направление отсчета) по касательной к траектории, т. е. перпендикулярно радиусу R в точке M.

Переносная скорость $\vec{v}_e$ точки M равна скорости той точки тела A, с которой она совпадает в данный момент. Тело A совершает вращательное движение вокруг оси BC, поэтому по модулю

$$v_e = \omega\, MK,$$

где MK – расстояние от точки M до оси BC; ω – угловая скорость переносного вращательного движения.

Так как уравнение вращательного движения $\varphi = f_1(t)$ задано, то находим

$$\omega = \frac{d\varphi}{dt} = \frac{d}{dt}(4t - 5t^3) = 4 - 15t^2,$$

при $t_1 = 1$ с $\omega = 4 - 15 \cdot 1^2 = -11$ рад/с.

Знак минус указывает на то, что в момент времени $t_1 = 1$ с тело A вращается в направлении, противоположном положительному отсчету угла φ (рис. 7).

При $t_1 = 1$ с расстояние MK равно

$$MK = R - R\cos 60^\circ = 0{,}5 \cdot R = 5{,}7 \text{ см}.$$

Величина переносной скорости при $t_1 = 1$ с

$$v_e = 11 \cdot 5{,}7 = 62{,}7 \text{ см/с}.$$

Вектор $\vec{v}_e$ направлен перпендикулярно MK в сторону вращения тела, т. е. параллельно оси x от нас. Так как в данном случае векторы $\vec{v}_r$ и $\vec{v}_e$ взаимно перпендикулярны, то модуль абсолютной скорости точки M

$$v_M = \sqrt{v_r^2 + v_e^2},$$

при $t_1 = 1$ с получим:

$$v_M = \sqrt{9{,}4^2 + 62{,}7^2} = 64{,}5 \text{ см/с}.$$

Переходим к определению абсолютного ускорения точки M.

Согласно теореме сложения ускорений (теорема Кориолиса) абсолютное ускорение точки в случае переносного вращательного движения равно геометрической сумме относительного, переносного и кориолисова ускорений

$$\vec{a}_M = \vec{a}_r + \vec{a}_e + \vec{a}_c. \qquad (15)$$

При естественном способе задания относительного движения относительное ускорение точки определяется выражением

$$\vec{a}_r = \vec{a}_r^{\tau} + \vec{a}_r^{n}.$$

Величины касательной $\vec{a}_r^{\tau}$ и нормальной $\vec{a}_r^{n}$ составляющих равны:

$$a_r^{\tau} = \frac{dv_r}{dt} = \frac{d^2 s}{dt^2} = -3\sqrt{2}\,\frac{\pi^2}{4}\sin\frac{\pi t}{4},$$

$$a_r^{n} = \frac{v_r^2}{R}.$$

При $t_1 = 1$ с, $a_r^{\tau} = -7{,}5\ см/с^2$, $a_r^{n} = 7{,}8\ см/с^2$.

Так как знаки величин a_r^{τ} и v_r различны, то относительное движение является замедленным и вектор $\vec{a}_r^{\tau}$ противоположен вектору $\vec{v}_r$. Вектор $\vec{a}_r^{n}$ направлен к центру кривизны траектории в относительном движении, т. е. по радиусу к точке O_1 (рис. 7).

Переносное ускорение $\vec{a}_e$ точки M также складывается из двух составляющих:

$$\vec{a}_e = \vec{a}_e^{вр} + \vec{a}_e^{ц},$$

т. к. переносное движение является вращательным. По модулю вращательная составляющая $\vec{a}_e^{вр}$ и центростремительная составляющая $\vec{a}_e^{ц}$ переносного ускорения определяются выражениями

$$a_e^{вр} = MK \cdot \varepsilon\,,\ a_e^{ц} = MK \cdot \omega^2\,, \qquad (16)$$

где ε – угловое ускорение тела *A*.

По определению

$$\varepsilon = \frac{d\omega}{dt} = \frac{d^2\varphi}{dt^2} = -30t\,.$$

При t_1 = 1 с $\varepsilon = -30\,рад/c^2$.

Знаки ε и ω совпадают, поэтому совпадают направления векторов ε и ω, а также $\vec{a}_e^{вр}$ и $\vec{v}_e$. Вектор $a_e^{ц}$ направлен к оси вращения, т. е. по линии *MK* к точке *K* (рис. 7). Подставляя в (16) численные значения входящих величин, при t_1 = 1с имеем

$$a_e^{вр} = 171\ \text{см/с}^2,\ \ a_e^{ц} = 689{,}7\ \text{см/с}^2.$$

Вектор кориолисова ускорения $\vec{a}_c$ определяется по формуле

$$\vec{a}_c = 2\omega \times \vec{v}_r\,.$$

Его модуль

$$a_c = 2\omega \cdot v_r \sin\angle(\vec{\omega}, \vec{v}_r)\,.$$

Из рис. 7 видно, что угол между векторами $\vec{\omega}$ и $\vec{v}_r$ равен 60°, поэтому при t_1 = 1 с

$$a_c = 2 \cdot 11 \cdot \pi \sin 60^o = 59{,}8\ \text{см/с}^2\,.$$

В соответствии с правилом векторного умножения вектор $\vec{a}_c$ направлен перпендикулярно плоскости рисунка от нас, т. е. совпадает с направлением $\vec{a}_e^{вр}$ (рис. 7). Перепишем уравнение (15) в виде

$$\vec{a} = \vec{a}_r^{\tau} + \vec{a}_r^{n} + \vec{a}_e^{вр} + \vec{a}_e^{ц} + \vec{a}_c \qquad (17)$$

и определим модуль абсолютного ускорения точки *M*, используя способ проекций. Проецируя уравнение (17) на оси координат *Oxyz*, находим

$$a_x = -a_e^{вр} - a_c = -(171 + 59{,}8) = -230{,}8\ \text{см/с}^2.$$

$$a_z = -a_r^{\tau} \sin\alpha + a_r^{n} \cos\alpha - a_e^{ц} = -7{,}5 \cdot 0{,}865 + 7{,}8 \cdot 0{,}5 - 689{,}7 = -692\ \text{см/с}^2\,.$$

$$a_y = a_r^{\tau} \cos\alpha + a_r^{n} \sin\alpha = 7{,}5 \cdot 0{,}5 + 7{,}8 \cdot 0{,}865 = 10{,}45\ \text{см/с}^2.$$

Отсюда находим $a_M = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2} = 729{,}5\ \text{см/с}^2$.

Задача Д1. Применение теоремы об изменении кинетической энергии к исследованию движения механической системы

Задача Д1 – на применение теоремы об изменении кинетической энергии в интегральной форме, т.е. за конечный отрезок времени. При решении задачи необходимо учесть, что кинетическая энергия системы равна сумме кинетических энергий всех движущихся тел, входящих в систему. Кинетическую энергию системы необходимо выразить через искомую скорость, которая указана в столбце "Найти:" (см. табл. Д1) Для тел, совершающих плоское движение, скорости точек определяются с помощью мгновенного центра скоростей. При вычислении работы сил, приложенных к системе, необходимо все перемещения точек их приложения выразить через заданные перемещения, учтя при этом, что соотношения между перемещениями точек будут такими же, как и между их скоростями. Учитывая, что на систему наложены только идеальные связи, работа внутренних сил системы равна нулю.

Задания к задаче Д1

Механическая система состоит из трёх движущихся тел (рис. Д1.0–Д1.9), соединенных нерастяжимыми нитями, параллельными соответствующим плоскостям. Неподвижные и подвижные блоки одного радиуса считать однородными сплошными цилиндрами радиуса R; ступенчатые блоки (подвижные и неподвижные) с радиусами ступеней R и r имеют радиус инерции ρ. К одному из тел прикреплена пружина жёсткости c. Под действием силы $F = F(s)$, зависящей от перемещения s точки её приложения, система приходит в движение из состояния покоя; деформация пружины в начальный момент времени равна нулю. При движении на шкив 2 действует момент сил сопротивления $M_C = M_C(\varphi)$, зависящий от угла φ поворота шкива 2.

Определить значение искомой величины в момент времени, когда центр масс тела 1 переместиться на заданную величину s_1. Искомая величина указана в столбце «Найти» таблицы, где обозначено: υ_1, υ_{C3} – скорости груза 1 и скорость центра масс катка 3 соответственно; ω_2, ω_3 и – угловые скорости тел 2 и 3.

Все катки, включая катки, обмотанные нитями, движутся по плоскостям без скольжения. Данные для численных расчётов приведены в таблице Д1.

Таблица Д1

Номер условия	m_1, кг	m_2, кг	m_3, кг	c, Н/м	$M_C(\varphi)$, Н·м	$F(s)$, Н	ρ, м	s_1, м	R, м	r, м	Найти:
0	6	5	4	150	$0{,}5\varphi$	$80(4+4s)$	0,15	0,1	0,4	0,2	υ_{C3}
1	8	6	5	100	$0{,}1\varphi$	$60(6+3s)$	0,2	0,15	0,4	0,25	ω_3
2	10	8	6	120	$1{,}5\varphi$	$50(8+3s)$	0,25	0,2	0,3	0,1	ω_2
3	12	10	8	200	$0{,}6\varphi$	$100(9+4s)$	0,3	0,1	0,5	0,4	υ_1
4	15	12	10	250	$0{,}2\varphi$	$90(8+5s)$	0,2	0,15	0,4	0,25	υ_{C3}
5	8	7	5	220	$0{,}3\varphi$	$50(6+5s)$	0,15	0,3	0.4	0,2	ω_2
6	10	8	6	280	$0{,}8\varphi$	$60(5+3s)$	0,25	0,2	0,3	0,1	ω_3
7	12	10	8	300	$1{,}2\varphi$	$40(8+7s)$	0,2	0,25	0,4	0,25	υ_1
8	9	6	4	320	$0{,}4\varphi$	$80(6+6s)$	0,15	0,1	0,4	0,2	ω_2
9	10	8	5	260	$0{,}7\varphi$	$90(5+4s)$	0,2	0,15	0,4	0,25	υ_{C3}

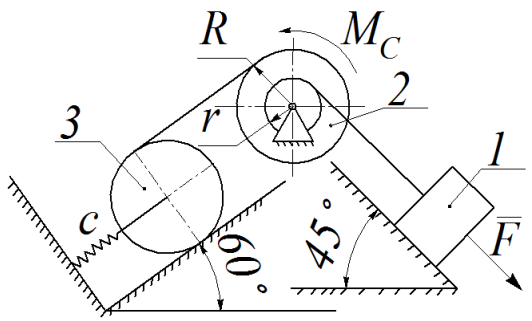

Рис. Д1.0

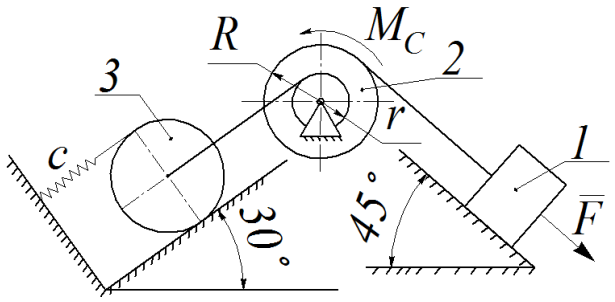

Рис. Д1.1

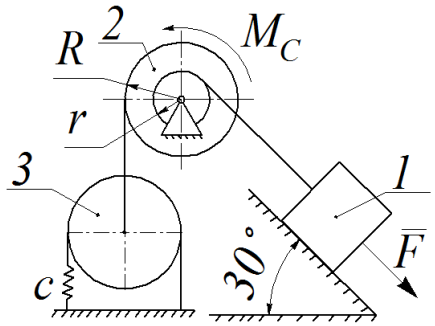

Рис. Д1.2

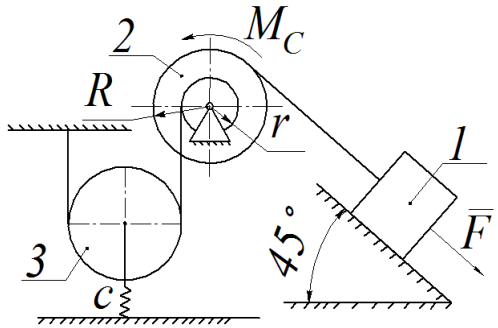

Рис. Д1.3

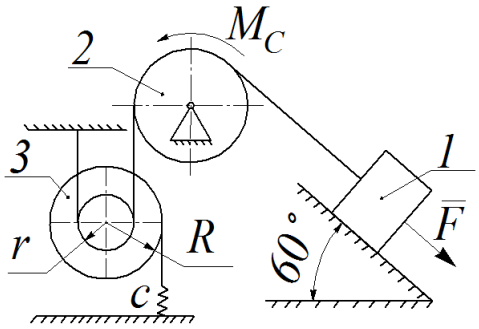

Рис. Д1.4

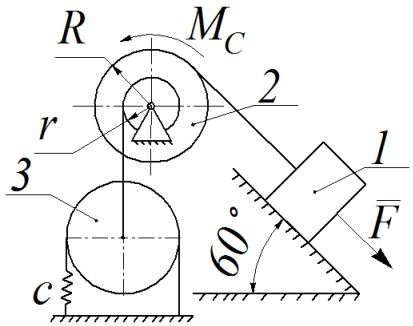

Рис. Д1.5

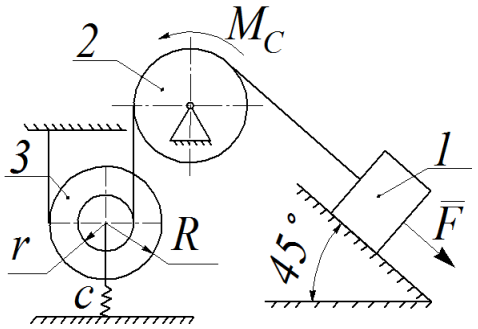

Рис. Д1.6

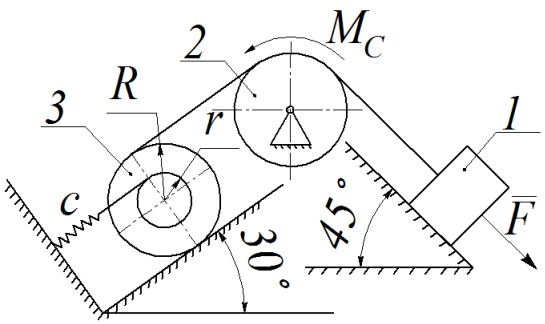

Рис. Д1.7

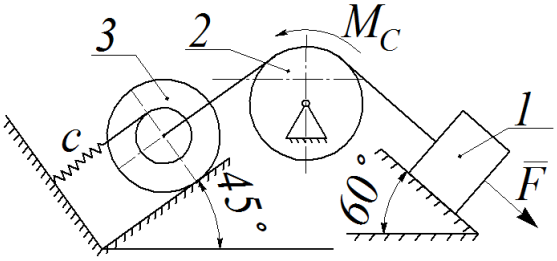

Рис. Д1.8

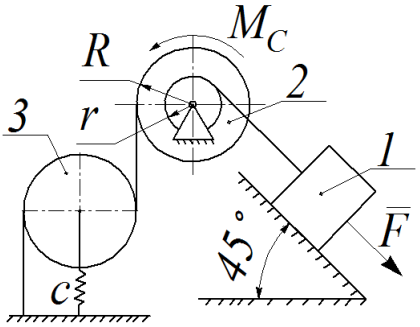

Рис. Д1.9

Пример решения задачи Д1

Дано: механическая система (рис. 8), состоящая из трёх тел массы m_1, m_2, m_3, соответственно соединённых нерастяжимыми нитями, приводится в движение из состояния покоя, под действием силы $F = F(s_1) = as+b$ (a, $b > 0$ – некоторые постоянные, s_1 – перемещение груза 1). К блоку 3 прикреплена пружина жёсткости c, которая в начальный момент движения системы находилась в свободном состоянии. Каток 3 катится без скольжения. К блоку 2 приложен момент сопротивления $M_c = k\varphi$ ($k > 0$, φ – угол поворота). Радиусы инерции блоков 2 и 3 равны ρ.

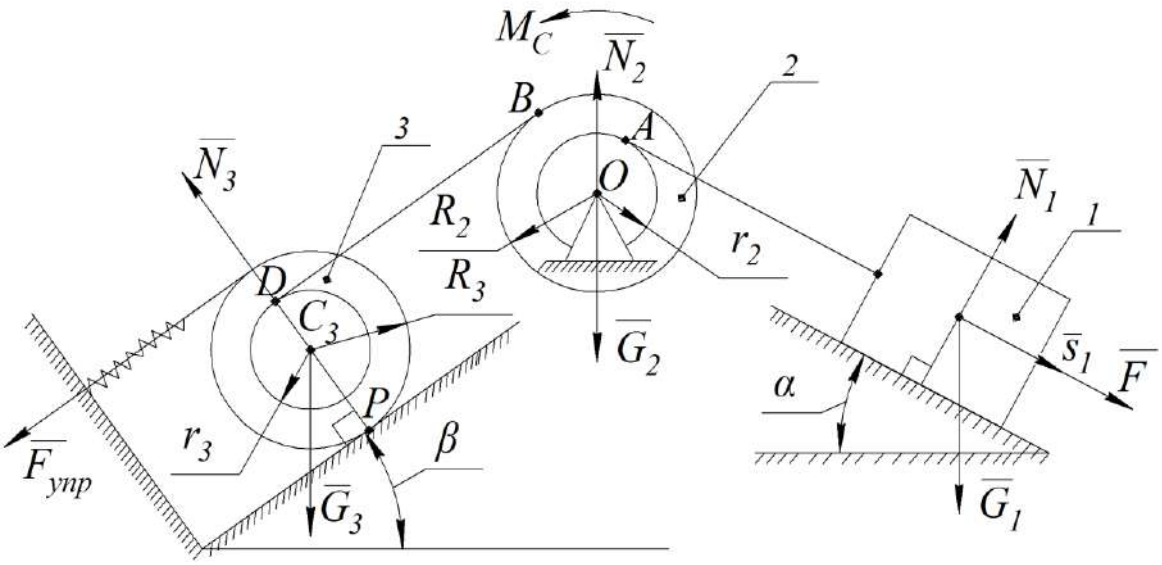

Рис. 8

Определить угловую скорость катка 3 в момент, когда груз 1 переместится на величину, s_1, т.е. найти $\omega_3(s_1)$.

Решение. Применяем теорему об изменении кинетической энергии системы в интегральной форме:

$$T_{\sum 1} - T_{\sum 0} = \sum A_{k(e)} + \sum A_{k(i)}\,, \qquad (18)$$

где $T_{\sum 0}$ – кинетическая энергия системы в начальный момент времени; $T_{\sum 1}$ – кинетическая энергия системы в момент времени, когда тело 1 переместится на величину s_1; $T_{\sum 0} = 0$, т.к. система находилась в покое; $A_{k(e)}$ – работа k-й внешней силы на перемещении точки её приложения; $\sum A_{k(i)}$ – работа внутренних сил системы; $\sum A_{k(i)} = 0$, т.к. связи между телами системы идеальны (нити нерастяжимы).

Начинаем решение задачи с определения кинетической энергии системы

$$T_{\sum 1} = T_1 + T_2 + T_3, \qquad (19)$$

где T_1 – кинетическая энергия поступательно движущегося груза 1; T_2 – кинетическая энергия блока 2, вращающегося вокруг неподвижной оси; T_3 – кинетическая энергия блока 3, совершающего плоское движение.

Учитывая вид движения каждого из 3-х тел системы, определим их кинетическую энергию:

$$T_1 = \frac{m_1 \upsilon_1^2}{2}, \qquad (20)$$

где υ_1 – скорость тела 1;

$$T_2 = \frac{J_2 \omega_2^2}{2}, \qquad (21)$$

где ω_2 – угловая скорость вращения блока 2; $J_2 = m_2\rho^2$ – момент инерции блока 2 относительно оси вращения;

$$T_3 = \frac{1}{2} m_3 \upsilon_{C3}^2 + \frac{1}{2} J_{C3} \omega_3^2, \qquad (22)$$

где υ_{C3} – скорость центра масс G катка 3; ω_3 – угловая скорость вращения блока 3; $J_{C3} = m_3\rho^2$ момент инерции блока 3 относительно оси, проходящей через его центр масс.

Все скорости, входящие в формулы (20)–(22), необходимо выразить через ω_3. Для этого учтём, что точка P – мгновенный центр скоростей, тогда $\upsilon_{C3} = \omega_3 R_3$, угловая скорость $\omega_2 = \frac{\upsilon_D}{R_2} = \frac{\upsilon_B}{R_2}$, а $\upsilon_D = \omega_3(R_3+r_3)$, откуда $\omega_2 = \frac{R_3 + r_3}{R_2}\omega_3$, скорость груза 1 равна скорости точки A блока 2, которая определяется $\upsilon_A = \omega_2 r_2 = \frac{(R_3 + r_3) r_2}{R_2}\omega_3 = \upsilon_1$.

Подставляя выражения для υ_1, ω_2 и υ_{C3} найденные через ω_3 в (20)–(22) и затем в (19) получаем

$$T = \frac{1}{2}\left[m_1 \left(\frac{(R_3 + r_3) r_2}{R_2} \right)^2 + m_2 \rho^2 \left(\frac{(R_3 + r_3)}{R_2} \right)^2 + m_3 R_3^2 + m_3 \rho^3 \right] \omega_3^2. \qquad (23)$$

Далее определяем работу всех внешних сил, приложенных к системе на перемещениях точек их приложения, выраженных через s_1. К системе приложены следующие внешние силы: силы тяжести G_1, G_2, G_3, реакции опор N_1, N_2, N_3, пара сил, образующая момент сопротивления, сила F , приложенная к грузу 1 и сила упругости пружины. Работа сил N_1, N_2, N_3 и G_2 равна нулю, так как сила N_1, перпендикулярна перемещению точки её приложения, силы N_2 и G_2 приложены в неподвижной точке, а точкой приложения силы N_3 является мгновенный центр скоростей (точка P, неподвижная в данный момент времени). Работы остальных сил определяются следующим образом:

$$A(F) = \int_0^{s_1} F(s) ds = \int_0^{s_1} (as + b) ds = \frac{a s_1^2}{2} + b s_1; \qquad (24)$$

$$A(G_1) = m_1 g s_1 \sin\alpha; \qquad (25)$$

$$A(G_3) = -m_3 g s_{C3} \sin\beta. \qquad (26)$$

Для определения перемещения центра масс катка 3 – s_{C3} выразим скорость υ_{C3} через υ_1:

$$\upsilon_{C3} = \frac{R_2 R_3}{r_2 (R_3 + r_3)} \upsilon_1, \text{ тогда } s_{C3} = \frac{R_2 R_3}{r_2 (R_3 + r_3)} s_1.$$

Подставляя полученное выражение для s_{C3} в (26), находим:

$$A(G_3) = -m_3 g \frac{R_2 R_3}{r_2 (R_3 + r_3)} s_1 \sin\beta . \qquad (27)$$

Работа момента сопротивления определяется по формуле:

$$A(M_C) = -\int_0^{\varphi} M_C(\varphi) d\varphi , \qquad (28)$$

где $\varphi = \frac{s_1}{r_2}$ – угол поворота блока 2, соответствующий перемещению груза 1 на величину s_1, тогда:

$$A(M_C) = \int_0^{\frac{s_1}{r_2}} k\varphi d\varphi = -\frac{k s_1^2}{2 r_2^2} . \qquad (29)$$

Работа силы упругости пружины определяется как:

$$A(F_{\text{упр}}) = \frac{c}{2}\left(\Delta_0^2 - \Delta_1^2\right), \qquad (30)$$

где $\Delta_0 = 0$ – начальная деформация пружины, равная нулю по условию задачи; Δ_1 – конечная деформация (удлинение) пружины, равная перемещению точки E, т.е.:

$$\Delta_1 = s_E = 2 s_{C3} = \frac{2 R_2 R_3}{r_2 (R_3 + r_3)} 2 s_1 . \qquad (31)$$

С учётом (31) выражение (30) приобретает вид:

$$A(F_{\text{упр}}) = -\frac{c}{2} \frac{4 R_2^2 R_3^2}{r_2^2 (R_3 + r_3)^2} s_1^2 . \qquad (32)$$

Суммируя (24), (25), (27), (29) и (32), получаем:

$$\sum A_k^e = \frac{a s_1^2}{2} + b s_1 + m_1 g s_1 \sin\alpha - m_3 g \frac{R_2 R_3}{r_2 (R_3 + r_3)} s_1 \sin\beta - \frac{k s_1^2}{2 r_2^2} - \frac{c}{2} \frac{4 R_2^2 R_3^2}{r_2^2 (R_3 + r_3)^2} s_1^2 . \qquad (33)$$

Приравнивая выражения (23) и (33) на основании (18), находим выражение для искомой величины – ω_3. Подставляя в найденное выражение все числовые значения заданных величин, получаем значение $\omega_3(s_1)$

$$\omega_3(s) = \sqrt{2 \frac{\left(\frac{a}{2} - \frac{k}{2 r_2^2} - \frac{2 c R_2^2 R_3^2}{r_2^2 (R_3 + r_3)^2}\right) s_1^2 + \left(b + m_1 g \sin\alpha - m_3 g \frac{R_2 R_3}{r_2 (R_3 + r_3)} \sin\beta\right) s_1}{m_1 \frac{(R_3 + r_3)^2 r_2^2}{R_2^2} + m_2 \rho^2 \frac{(R_3 + r_3)^2}{R_2^2} + m_3 \left(R_3^2 + \rho^3\right)}} . \qquad (34)$$

Замечание: при решении задачи допускается делать упрощение формул (23), (24), (25), (27), (29) и (32) путем подстановки исходных данных. В этом случае окончательный вид формулы (33) и (34) будет значительно проще.

Задача Д2. Применение принципа Даламбера к определению реакций связей

Даная задача на применение к изучению движения системы принципа Даламбера. То есть, если к каждой точке движущейся механической системы приложить соответствующую силу инерции, то действующие на систему силы и силы инерции уравновесятся. При этом в зависимости от характера движения тела систему сил инерции можно заменить или главным вектором сил инерции $\sum \vec{\Phi}_k = \vec{R}^u = m \cdot \vec{a}_c$, или главным моментом сил инерции $\sum \vec{M}_{ko}^{\Phi} = \vec{M}_o^u$, который в случае вращательного движения относительно оси вращения равен $\vec{M}_z^u = J_z \cdot \vec{\varepsilon}$, или обоими инерционными факторами вместе, где m – масса тела; $\vec{a}_c$ – ускорение его центра масс; $\vec{J}_z$ – момент инерции тела относительно оси вращения z; $\vec{\varepsilon}$ – угловое ускорение тела. Необходимо отметить, что линия действия силы $\vec{R}^u$ в общем случае не проходит через точку C.

Задания к задаче Д2

Вертикальный вал AK (рис. Д2.0–Д2.9), вращающийся с постоянной угловой скоростью $\omega = 10$ с$^{-1}$, закреплен подпятником в точке A и цилиндрическим подшипником в точке, указанной в таблице Д2, в столбце 2. При этом $AB = BD = DE = EK = a$. К валу жестко прикреплены однородный стержень 1 длиной $l = 0{,}6$ м, имеющий массу $m_1 = 3$ кг, и невесомый стержень 2 длиной $l_2 = 0{,}4$ м и с точечной массой $m_2 = 5$ кг на конце. Оба стержня лежат в одной плоскости. Точки крепления стержней к валу указаны в таблице в столбцах 3 и 4, а углы α и β – в столбцах 5 и 6.

Пренебрегая весом вала, определить реакции подпятника и подшипника. При подсчетах принять $a = 0{,}4$ м.

Таблица Д2

Номер условия	Подшипник в точке	Крепление		α, град	β, град
		Стержень 1 в точке	Стержень 2 в точке		
0	*D*	*B*	*K*	45	30
1	*E*	*K*	*B*	30	45
2	*B*	*D*	*K*	60	45
3	*D*	*E*	*B*	45	60
4	*K*	*B*	*D*	75	30
5	*E*	*D*	*K*	60	45
6	*B*	*E*	*D*	90	60
7	*K*	*B*	*E*	75	60
8	*D*	*K*	*B*	60	30
9	*E*	*D*	*K*	45	90

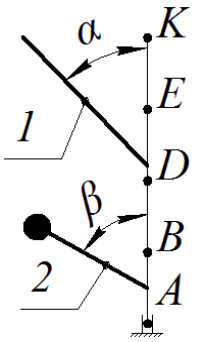

Рис. Д2.0

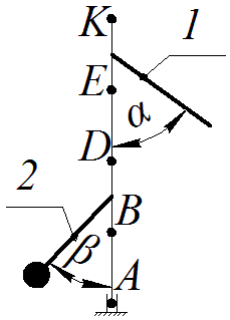

Рис. Д2.1

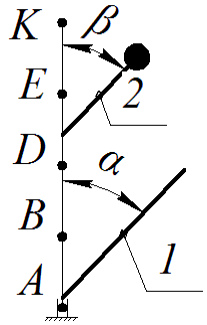

Рис. Д2.2

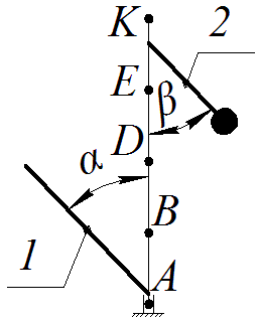

Рис. Д2.3

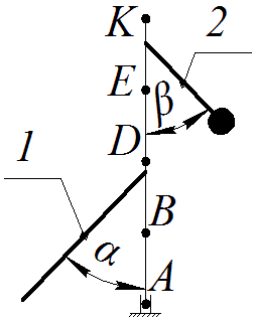

Рис. Д2.4

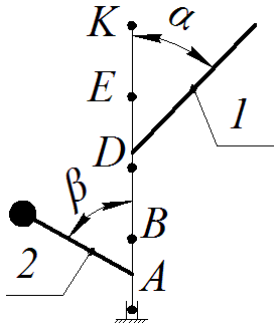

Рис. Д2.5

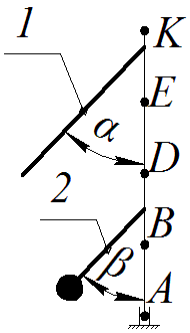

Рис. Д2.6

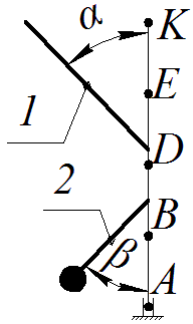

Рис. Д2.7

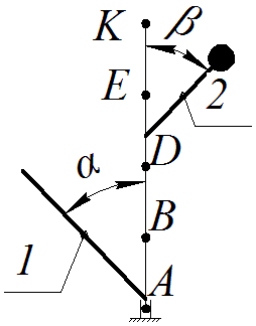

Рис. Д2.8

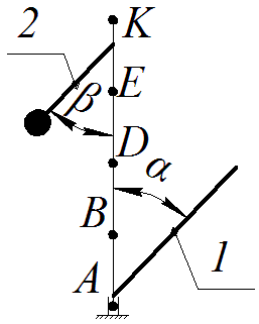

Рис. Д2.9

Пример решения задачи Д2

Определить реакции подпятника *A* и подшипника *B* вала, вращающего с постоянной угловой скоростью ω вокруг вертикальной оси *y*, если m_1 – масса однородного стержня $KN = 2l$, m_2 – масса груза, закрепленного на конце невесомого стержня $EM = l$, α и β – углы, которые составляют стержни с осью вала. При этом $AK = KE = ED = DB = a$.

Решение

Изображаем (с учетом заданных углов) вал и прикрепленные к нему стержни в точках *К* и *Е*, а также груз, закрепленный в точке *М*. (рис. 9).

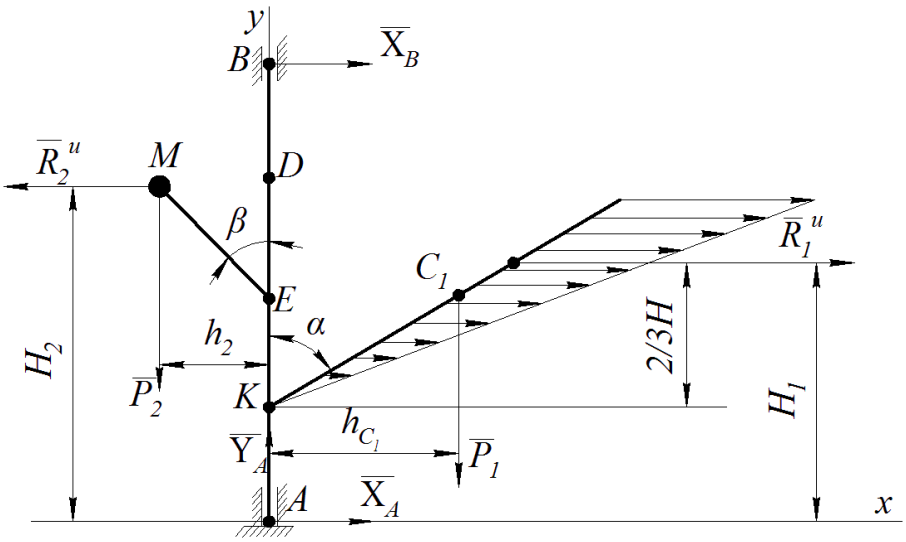

Рис. 9

Для определения искомых реакций рассмотрим движение заданной механической системы и применим принцип Даламбера. Проведем вращающиеся вместе с валом координатные оси *xAy* так, чтобы стержни лежали в плоскости *xy* и изобразим действующие на систему силы: активные силы – силы тяжести $\overline{P}_1 = m_1 \cdot \overline{g}$, $\overline{P}_2 = m_2 \cdot \overline{g}$ и реакции связей – составляющие реакции подпятника $\overline{X}_A$, $\overline{Y}_A$ и реакцию цилиндрического подшипника $\overline{X}_B$.

Согласно принципу Даламбера присоединим к этим силам силы инерции элементов однородного стержня и груза, считая его материальной точкой.

Так как вал вращается с постоянной угловой скоростью, то элементы стержня имеют только нормальные ускорения $\overline{a}_{nk} = \omega^2 \cdot h_k$, где h_k – расстояние от оси вращения. Тогда силы инерции будут направлены от оси вращения и численно $F_k^u = \Delta m_k \cdot a_{nk}$, где Δm_k – масса элемента. Так как все F_k^u пропорциональны h_k, то эпюры параллельных сил инерции стержня 1 образуют треугольник. Заменим полученную для стержня систему параллельных сил ее равнодействующей, равной главному вектору этих сил, то есть $R_1^u = m_1 \cdot a_{c1}$, здесь m_1 – масса стержня 1, a_{c1} – ускорение его центра масс.

Сила инерции груза, принимаемого за точечную массу *М*, должна быть направлена в сторону, противоположную ее ускорению и численно будет равна $R_2^u = m_2 \cdot a_2$. Ускорения центров масс стержня 1 и груза равны: $a_{c1} = \omega^2 \cdot h_{c1}$, $a_2 = \omega^2 \cdot h_2$, где h_{c1}, h_2 – расстояния от центра масс стержня и от груза до оси вращения и равны $h_{c1} = l \cdot \sin\alpha$, $h_2 = l \cdot \sin\beta$. Тогда по модулю $R_1^u = m_1 \cdot \omega^2 \cdot l \sin\alpha$, $R_2^u = m_2 \cdot \omega^2 \cdot l \cdot \sin\beta$.

Линия действия равнодействующей R_2^u пройдет через центр тяжести соответствующей эпюры сил инерции, то есть на расстояние 2/3*H* от вершины треугольника *К*, где $H = 2l \cdot \cos\alpha$.

Согласно принципу Даламбера приложенные внешние силы (активные реакции связей) и силы инерции образуют уравновешенную систему сил.

Все эти силы лежат в одной плоскости, поэтому можно составить три уравнения равновесия:

$$\sum F_{kx} = 0; \qquad X_A + X_B + R_1^u + R_2^u = 0;$$
$$\sum F_{ky} = 0; \qquad Y_A - P_1 - P_2 = 0;$$
$$\sum m_A\left(\vec{F}_k\right) = 0; \; -X_B \cdot 4a - P_1 \cdot h_{c1} + P_2 \cdot h_2 - R_1^u \cdot H_1 + R_2^u \cdot H_2 = 0,$$

где H_1, H_2 – плечи сил R_1^u, R_2^u относительно точки A, равные $H_1 = a + 2/3H$, $H_2 = 2a + l \cdot \cos\beta$.

Полученная система трех уравнений равновесия включает в себя три неизвестные реакции X_A, X_B, Y_A, значения которых можно найти, подставив соответствующие величины (см. выше) и решив эту систему уравнений.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Бутенин Н.В., Лунц Я.Л., Меркин Д.Р. Курс теоретической механики. – 8-е изд., стереотип. – СПб.: Лань, 2006. – 731 с.

2. Тарг С.М. Краткий курс теоретической механики. – М.: Высш. Шк., 1995. – 416 с.

3. Яблонский А.А., Никифорова В. М. Курс теоретической механики: учебник. – 11-е изд., стер. – СПб.: Лань, 2004. – 768 с.

4. Сборник заданий для курсовых работ по теоретической механике: учеб. пособие для техн. вузов / А.А. Яблонский, С.С. Норейко, С.А. Вольфсон и др.; под ред. А.А. Яблонского. – 4-е изд., перераб. и доп. – М.: Высш. Шк., 1985. – 367 с.

СОДЕРЖАНИЕ

Введение 3

Общие указания к выполнению контрольных и расчетно-графических работ 4

Задача С1. Равновесие произвольной плоской системы сил (определение реакций опор твёрдого тела) 4

Задача С2. Определение реакций опор твёрдого тела (пространственная система сил). 7

Задача К1. Кинематика плоских механизмов 10

Задача К2. Сложное движение точки 17

Задача Д1. Применение теоремы об изменении кинетической энергии к исследованию движения механической системы. 23

Задача Д2. Применение принципа Даламбера к определению реакций связей 28

Библиографический список 31