Министерство образования и науки Российской Федерации
ФБ ГОУ ВО «Удмуртский государственный университет»
Институт нефти и газа им. М.С. Гуцериева

Т.Н. Иванова

УЧЕБНО-МЕТОДИЧЕСКОЕ ПОСОБИЕ
по дисциплине
«ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ И ПРИКЛАДНАЯ МЕХАНИКА»

Часть 1. Теоретическая механика
для студентов направления 21.03.01 Нефтегазовое дело
профили: Бурение нефтяных и газовых скважин
Разработка и эксплуатация нефтяных и газовых месторождений

заочной формы обучения

Ижевск 2017

ББК 30.70
И 20

Рецензент: Дементьев В. Б., доктор технических наук, профессор,
директор Института прикладной механики Уральского Отделения Российской Академии Наук

Иванова Т.Н. Учебно-методическое пособие по дисциплине «Теоретическая механика» Часть 1. Теоретическая механика для студентов направления 21.03.01 Нефтегазовое дело, профили: Бурение нефтяных и газовых скважин, Разработка и эксплуатация нефтяных и газовых месторождений, заочной формы обучения. Ижевск, ФБ ГОУ ВО УдГУ, 2017. 30 с.

В пособии рассмотрены теоретические вопросы и типовые задачи по дисциплине «Теоретическая и прикладная механика» Часть 1. Теоретическая механика. Разделы Статика и Кинематика.

Издается по рекомендации Ученого Совета ИНГ им М.С. Гуцериева.

Тема 1. Статика.

1.1. Основные понятия статики

Механика – наука о движении материальных тел. Под *движением* мы понимаем происходящее с течением времени их перемещение в пространстве. Движение в более широком смысле слова (изменение состояния материальных тел, живых организмов и т.д.) является предметом изучения других наук (физики, химии и т.д.). Перемещение тел в отличие от других форм движения называется *механическим движением*. В теоретической механике исследуются общие законы механического движения материальных тел. Применение механики к решению специальных технических задач (исследование прочности сооружений, изучение движения машин и т.д.) составляет содержание различных отделов механики прикладной. В зависимости от свойств тел различают механику твердого тела, механику упругой среды, механику жидкостей и газов (гидро и аэромеханику), квантовую механику.

Теоретическая механика служит базой, основой других разделов механики.

Основоположником механики как науки является Архимед. Он создал учение о равновесии сил приложенных к рычагу, учение о центре тяжести тела. Большой вклад в науку внесли труды Ньютона, Лагранжа, Даламбера, Пуансо, и русских ученых: Остроградского, Чебышева, Ковалевской, Мещерского и др.

Курс теоретической механики делится на три раздела: статику, кинематику и динамику.

Статика – раздел механики, в котором изучаются методы преобразования систем сил в эквивалентные системы и устанавливаются условия равновесия сил, приложенных к твердому телу.

Кинематика – раздел механики, в котором изучается движение материальных тел в пространстве, вне связи с силами, определяющими это движение.

Динамика – раздел механики, который изучает движение материальных тел в пространстве в зависимости от действующих на них сил и устанавливаются общие законы этого движения.

Материальное тело, размеры которого в конкретных условиях можно не учитывать, принято называть **материальной точкой**. Например, при изучении движения планет солнечной системы вокруг Солнца их размерами, по сравнению с их расстояниями от Солнца, пренебрегают и рассматривают эти планеты как материальные точки.

Системой материальных точек называют такую совокупность материальных точек, в которой положение и движение каждой точки зависит от положения и движения других точек этой системы.

В теоретической механике рассматриваются такие тела, расстояние между любыми точками которых остается постоянным. Такие тела называют **абсолютно твердыми.**

Важнейшим понятием теоретической механики является понятие силы.

Сила – это есть мера механического взаимодействия между материальными телами, определяющая интенсивность и направление этого взаимодействия. Сила определяется: точкой приложения, направлением, численным значением (модулем). Сила изображается вектором (рис.1).

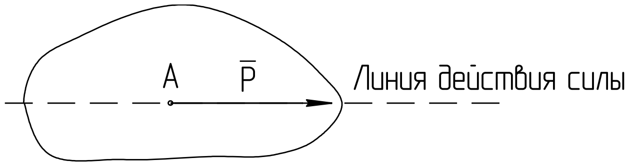


Рис.1. Изображение силы P.

Прямая, совпадающая с направлением силы, называется **линией действия силы**. За единицу силы в технической системе единиц принимается 1 кг (1 кг = =9.8 н).

Совокупность нескольких сил, действующих на данное тело или систему тел, называется **системой сил**. Системы сил, вызывающие одинаковое изменение кинематического состояния тела, называют **эквивалентными системами сил**. Сила, эквивалентная некоторой системе сил, называется **равнодействующей силой**. Систему сил, под действием которой тело может находиться в состоянии покоя, называют **системой взаимно уравновешивающих сил** (рис.2).

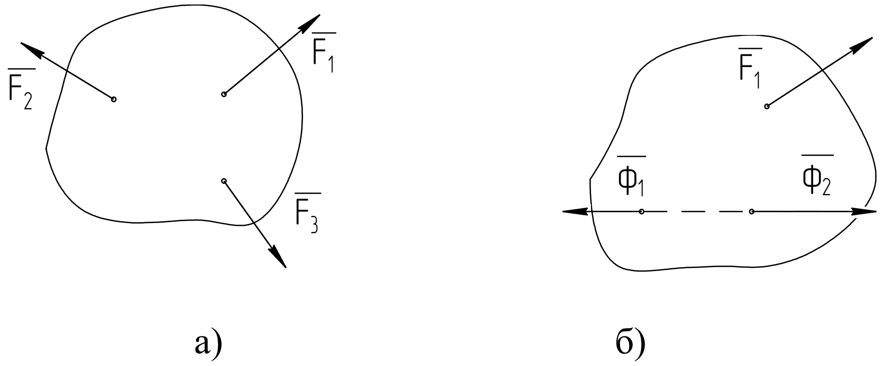


Рис. 2. Изображение сил: а) система сил, б) системой взаимно уравновешивающих сил (силы $Ф_1$ и $Ф_2$)

Силы делят на 2 группы:

1) внешние. Это силы, действующие на материальные точки данной системы со стороны материальных точек, не принадлежащих этой системе.
2) внутренние. Это есть силы взаимодействия между материальными точками рассматриваемой системы.

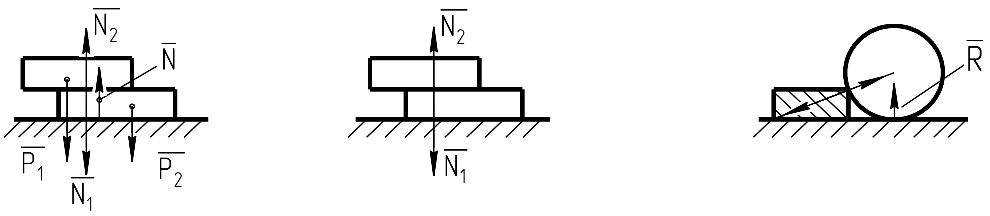
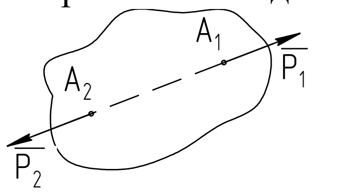


Рис. 3. Внешние и внутренне силы.

Рассмотрим основные аксиомы статики.

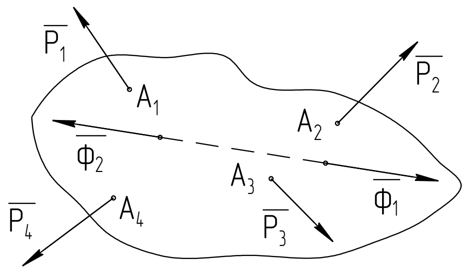
1. <u>Аксиома инерции.</u> Под действием взаимно уравновешивающихся сил материальная точка находится в состоянии покоя или движется прямолинейно и равномерно.

2. Аксиома равновесия двух сил. Две силы, приложенные к твердому телу, взаимно уравновешиваются тогда и только тогда, если их модули равны, и они направлены по одной прямой в противоположные стороны.



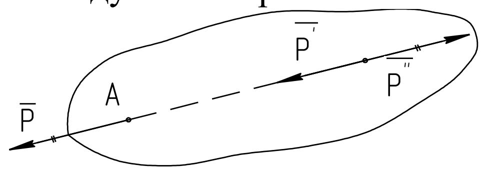
3. Аксиома присоединения и исключения уравновешивающих сил. Если к твердому телу, находящемуся под действием некоторой системы сил, приложить уравновешивающуюся систему или исключить такую систему сил, то получится система сил, эквивалентная заданной системе.

Например, твердое тело, под действием сил $\overline{P_1}\overline{P_2}\overline{P_3}\overline{P_4}$, тело находится в



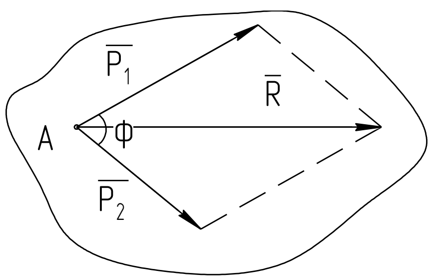
состоянии покоя или совершает движение. Приложим к нему 2 равные силы, но направленные в противоположные стороны. Если тело в покое, то оно сохранит его, если в движении, то так же будет двигаться, только под действием сил $\overline{P_1}\overline{P_2}\overline{P_3}\overline{P_4}\overline{\phi_1}\overline{\phi_2}$. Системы эквивалентны.

Следствие. Не изменяя состояния абсолютно твердого тела, силу можно переносить вдоль ее линии действия, сохраняя неизменным ее модуль и направление.



Таким образом, силу можно переносить в любую точку по линии действия, сохраняя модуль и направление. Поэтому в статике твердого тела, сила рассматривается как скользящий вектор.

4. Аксиома параллелограмма сил. Равнодействующая 2-х пересекающихся сил приложена в точке пересечения и изображается диагональю параллелограмма, построенного на этих силах.



$$\overline{R} = \overline{P_1} + \overline{P_2}$$

$$R = \sqrt{P_1^2 + P_2^2 + 2P_1P_2\cos\phi}$$

5. Аксиома равенства действия и противодействия. Всякому действию соответствует равное и противоположно направленное противодействие. Эта аксиома утверждает, что силы действия 2-х тел друг на друга равны по величине и противоположно направлены. Эта аксиома известна как один из законов классической механики.

6. Равновесие сил, приложенных к деформирующемуся телу, сохраняются при его затвердевании. Из этой аксиомы следует, что условия равновесия сил, приложенных к абсолютно твердому телу, должны выполнятся и для сил, приложенных к деформирующемуся телу. Однако в случае деформации тела это условие необходимо, но недостаточно.

Например:

1.2. Несвободное твердое тело. Связи. Реакции связей.

Твердое тело называется **свободным**, если оно может перемещаться в пространстве в любом направлении. Условия, ограничивающие движение тела, называются **связями**. Тело, свобода движения которого стеснена связями, называется **несвободным твердым телом**. Сила, с которой связь действует на твердое тело, называется **реакцией связи (силой реакции).** *Направление этой силы реакции противоположно тому направлению, в котором связь препятствует движению тела.*

Несвободное твердое тело можно рассматривать как свободное, на которое, кроме заданных сил, действуют реакции связей.
Этот принцип называется **принципом освобождаемости твердых тех от связей**.

Рассмотрим примеры связей и, применяя этот принцип, определим силы реакции этих связей.

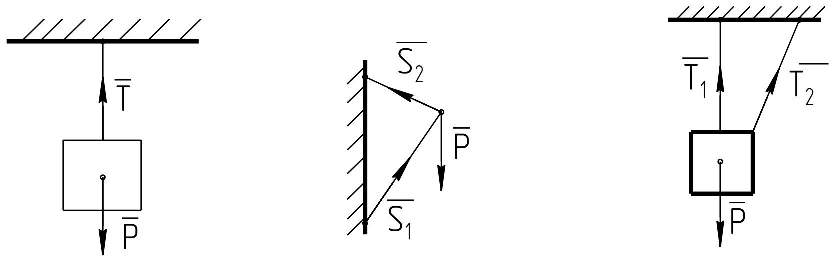
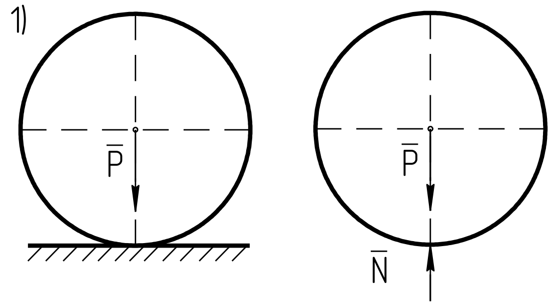
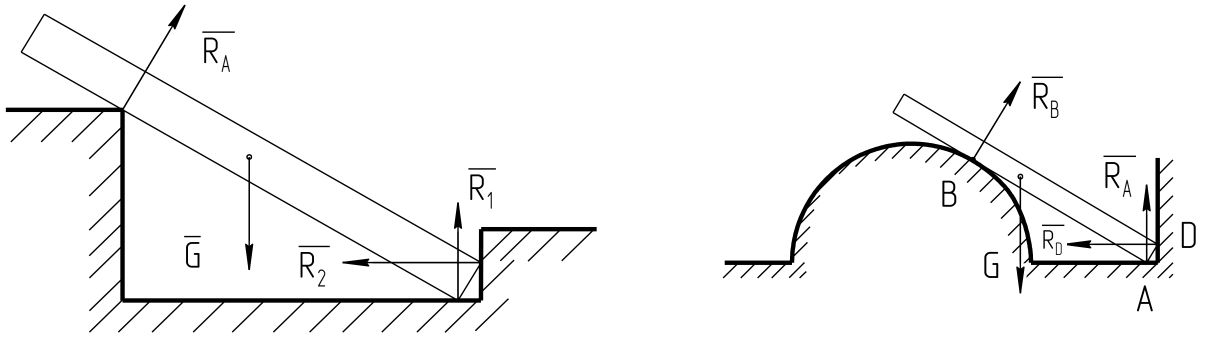


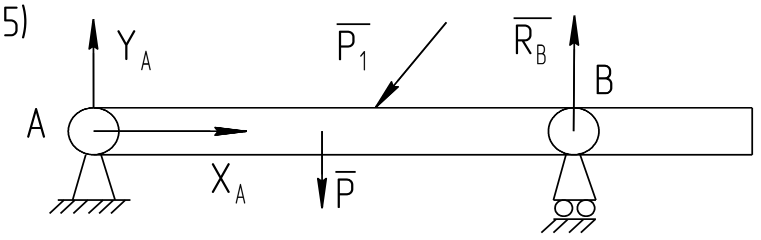
Рис. 4. Связи. Типовые примеры. Сила - *P*, реакции - T, S_1 S_2 направлены по нити.



Плоскость, ограничивающая движение шара, является для него связью. Если мысленно убрать связь, то чтобы шар удержался в покое, к нему надо приложить силу $\overline{N}$ в точке качания, равную весу, и направленную вверх. $\overline{N}$ - реакция плоскости.



Реакции $R_а$, R_1, R_2 , $R_д$, $R_в$ – направлены перпендикулярно к плоскости,G – сила тяжести.



шарнирно-неподвижная *шарнирно-подвижная*

В точке А называется *опора – шарнирно-неподвижная*, которая препятствует любому поступательному движению балки, но дает возможность ей поворачиваться вокруг оси шарнира. От нее возникают две реакции по оси X и по оси Y. *Реакции можно направлять и в другую сторону, впоследствии знак расчета покажет правильность направления.*

В точке В называется опора шарнирно-подвижная. От нее возникает только одна реакция – по оси У, т.е. линия действия реакции этой опоры перпендикулярна опорной плоскости.

В жесткой заделке возникают три реакции (рис. 5, схема *а*, точка А) по осям X,Y и крутящий момент M_A.

На рис. 5, схема *б* в точке А скользящая заделка, от нее возникают реакции по оси Y и крутящий момент; в точке В жесткая заделка - возникают три реакции по осям X,Y и крутящий момент M_A.

На рис. 5, схема *в* в точке А изображена бискользящая заделка, от нее возникает только крутящий момент, в точке шарнирно-неподвижная опора, от нее возникают две реакции по оси X и по оси Y.

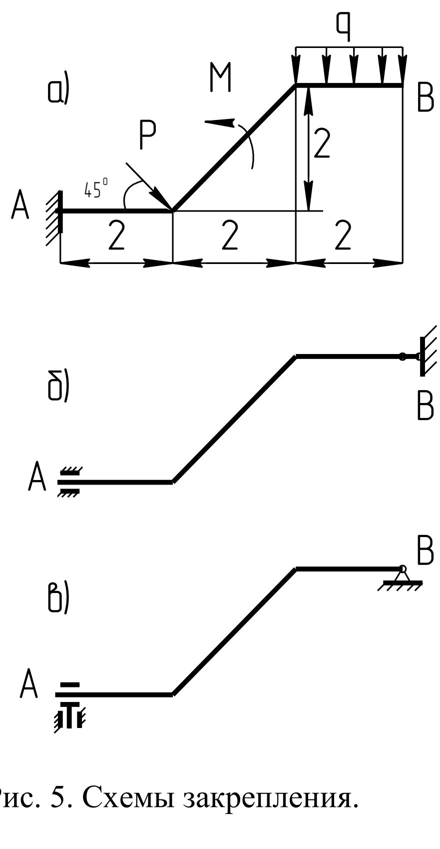


Рис. 5. Схемы закрепления.

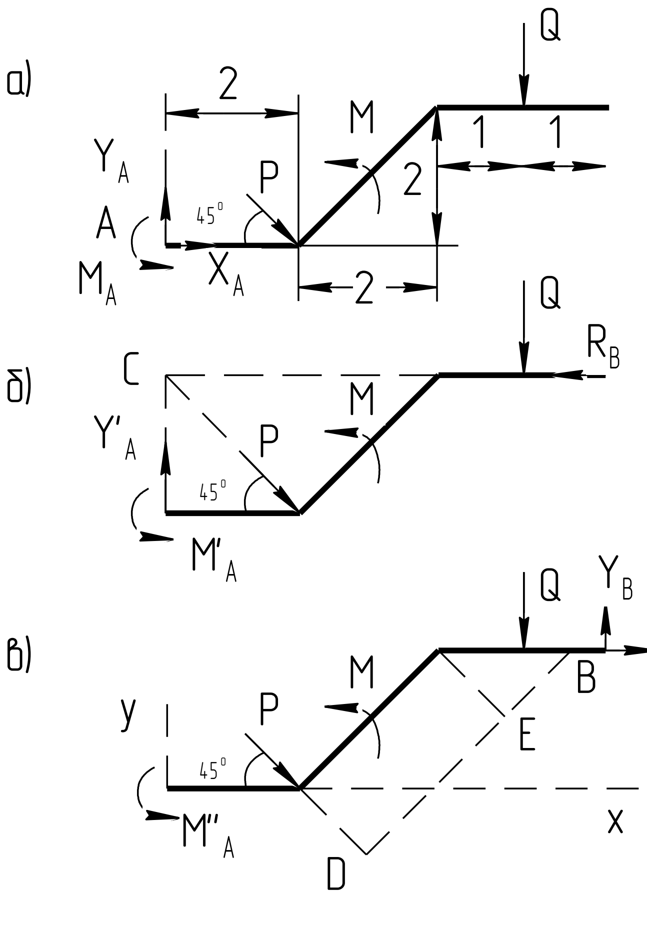
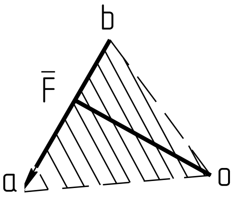


Рис. 6. Реакции к схемам по рис. 5.

Моментом силы относительно данной точки называется взятие со знаком плюс или минус произведение модуля этой силы не длину перпендикуляра, опущенного из этой точки на линию действия силы. Расстояние данной точки от линии действия силы, называют **плечом силы относительно точки**.



$M_0(F) = \pm|Fh|$; $M_0 = 0.25_{\Delta ABO}$;

h – расстояние, из точки опущен перпендикуляр на направление силы.

Условимся знак момента определять так:

1) если сила стремится повернуть рычаг по часовой стрелке, то знак момента минус;

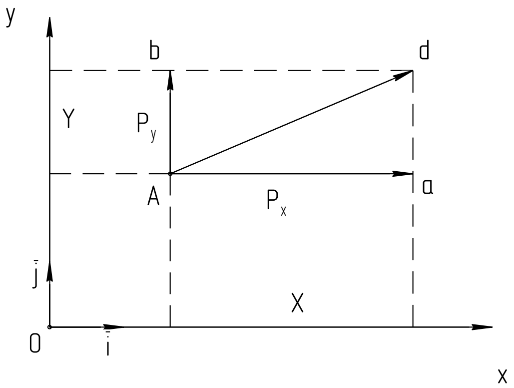
2) если против часовой стрелки, то плюс.

Если сила проходит через т. О, то h=0 и $M_0(F) = 0$;

Т.к. сила выражается в кН, а h – в м, то размерность момента кН М

Проекции силы на 2-е взаимно перпендикулярные оси на плоскости.

Возьмем оси координат X,Y. Силу $\overline{P}$ можно разложить на две составляющие силы $\overline{P_x}$ и $\overline{P_y}$, направленные параллельно этим осям.



$\bar{i}, \bar{j}$ - единичные векторы, направленные по осям x,y

X,Y – проекции силы на эти оси.

$\overline{P} = \bar{i} \cdot P_x + \bar{j} \cdot P_y$

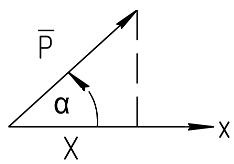
Проекции сил будут определяться

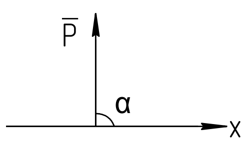
$$\begin{cases} \overline{P_x} = \bar{i} \cdot P_x \\ \overline{P_y} = \bar{j} \cdot P_y \end{cases}$$

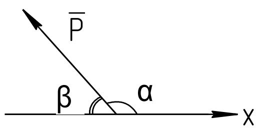
Отсюда: $\overline{P} = \bar{i} \cdot x + \bar{j} \cdot y$

Из ΔAad и ΔAbd : $\begin{cases} X = P\cos(\widehat{\overline{P}, \bar{i}}) \\ Y = P\cos(\widehat{\overline{P}, \bar{j}}) \end{cases}$

где $(\widehat{\overline{P}, \bar{i}})$ и $(\widehat{\overline{P}, \bar{j}})$ - углы, составленные силой с положительными направлениями осей X,Y. Угол отсчитывается от оси по часовой стрелке или против, только чтоб угол не превышал $180°$.







Таким образом проекция силы на ось определяется произведением модуля силы на cos угла между направлениями оси и силы.

Частные случаи:

1) $\alpha < 90°$ проекция положительна $x = P\cos\alpha$

2) $\alpha = 90°$ проекция равна нулю $x = P\cos 90° = 0$

3) $\alpha < 90°$ проекция отрицательна. $x = P\cos\alpha = -P\sin\beta$

При решении задач знак проекции определяется по чертежу. По известным проекциям можно найти модуль и направление силы Р:

$$P = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$\cos(\widehat{\bar{P},\bar{i}}) = \frac{x}{P}; \quad \cos(\widehat{\bar{P},\bar{j}}) = \frac{y}{P}.$$

Для определения реакций составляются уравнения равновесия.

*Все задачи на равновесие сил, приложенных к некоторому телу (точке) решаются по следующему **плану**:*

1. показывают на тело действующие силы.
2. мысленно освобождают тело от связей, заменяя их действие соответствующими реакциями.
3. к полученной системе сил применяем условия равновесия, соответствующие этой системе.
4. определяем искомые величины.

Пример расчета. *Дано*: схемы закрепления бруса (рис. 5, *а, б, в*): сила Р=5 кН; момент М = 8 кНм, распределенная нагрузка q =$1.2\ кН/м$.

Определить реакции опор для того способа закрепления, при котором момент M_A в заделке имеет наименьшее числовое значение.

Решение. Рассмотрим систему уравновешивающихся сил, приложенных к конструкции. Действие связей на конструкцию заменяем их реакциями (рис. 6): в схеме *а* - X_A, Y_A, M_A, в схеме *б* - Y'_A, M'_A и R_B, в схеме *в* - M''_A, X_B и Y_B.

Равномерно распределенную нагрузку интенсивностью q заменяем равнодействующей нагрузкой Q=q2=2.4 kH. (2 – длина на которой действует q)

Чтобы выяснить, в каком случае момент в заделке является наименьшим, найдем его для всех трех схем, не определяя пока остальных реакции.

Для схемы *а*

$$\sum M_{iA} = 0;\ \ M_A - P\cdot 2\sin 45° + M - Q\cdot 5.$$

Вычисления дают

$$M_A = 11.07\ kH\cdot м.$$

Для схемы б

$$\sum M_{iC} = 0;\ M'_A + M - Q\cdot 5 = 0 \ \text{ и }\ M'_A = 4.00\ kH\cdot м.$$

Для схемы в

$$\sum M_{iB} = 0;\ \ M''_A + P\cdot BD + M + Q\cdot 1 = 0 \ \text{ и }\ M''_A = -31.36\ kH\cdot м.$$

Здесь

$$BD = BE + ED = \sqrt{2} + 2\sqrt{2} = 4.24 м$$

Таким образом, наименьший момент в заделке получается при закреплении бруса по схеме б. Определим остальные опорные реакции для этой схемы:

Сумма всех сил, действующих по оси X должна быть равна нулю.

$\sum X_i = 0;\ \ P\cos 45° - R_B = 0$ откуда $R_B = 3.54$ кН;

Сумма всех сил, действующих по оси Y должна быть равна нулю.

$\sum Y_i = 0;\ \ Y'_A - P\sin 45° - Q = 0$ откуда $Y'_A = 5.94$ кН;

Задача С1.

Определить реакции стержней, удерживающих грузы F_1 и F_2. Массой стержня пренебречь. Номер схемы и данные своего варианта взять из таблицы 1. Схемы к задаче приведены на рис.7.

Таблица 1.

№ варианта	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**	**11**	**12**	**13**	**14**	**15**
№ схемы	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	1	2	3	4	5
F_1, кН	0,6	1,2	0,3	1,0	0,3	0,2	0,2	0,2	0,9	0,2	0,1	0,4	1,2	0,8	0,9
F_2, кН	0,8	0,4	1,2	0,8	0,9	0,6	0,5	0,8	0,3	0,7	0,5	0,8	0,4	0,2	0,3
№ варианта	**16**	**17**	**18**	**19**	**20**	**21**	**22**	**23**	**24**	**25**	**26**	**27**	**28**	**29**	**30**
№ схемы	6	7	8	9	10	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
F_1, кН	0,4	0,3	0,6	0,2	0,5	0,8	0,4	1,2	0,8	0,9	0,5	0,8	0,4	0,5	0,8
F_2, кН	0,5	0,8	0,4	0,5	0,8	0,4	0,2	0,8	1,0	0,6	0,4	0,3	0,6	0,2	0,5

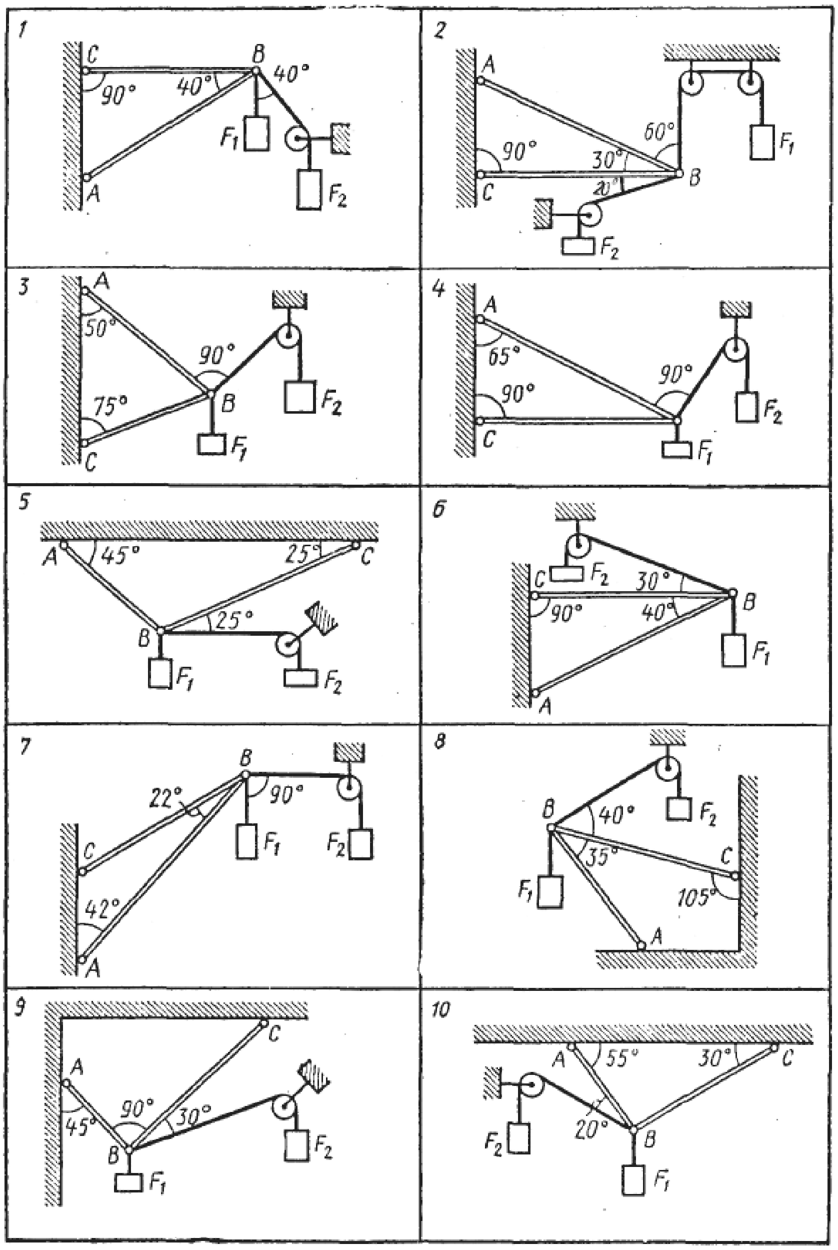


Рис.7. Схемы к задаче С1

Последовательность решения задачи:

1. Выбрать тело (точку), равновесие которого следует рассматривать.
2. Освободить тело (шарнир *B)* от связей и изобразить действующие на него активные силы и реакции отброшенных связей. При чем реакции стержней следует направить от шарнира *B,* так как принято считать предположительно стержни растянутыми.
3. Выбрать систему координат, совместив ее начало с точкой *B,* и составить уравнения равновесия, используя условия равновесия системы сходящихся сил на плоскости $\Sigma F_x = 0;\ \Sigma F_y = 0.$
4. Определить реакции стержней из решения указанной системы уравнений.
5. Проверить правильность полученных результатов по уравнению, которое не использовалось при решении задачи, либо решить задачу графически.

Пример расчета к заданию С1.

Определить реакции стержней, удерживающих грузы F_1=70 кН и F_2=100 кН (рис.8,*а*). Массой стержней пренебречь.

1. Рассматриваем равновесие шарнира *B* (рис.8,а).
2. Освобождаем шарнир *B* от связей и изображаем действующие на него активные силы и реакции связей (рис.8,а).
3. Выбираем систему координат и составляем уравнения равновесия для системы сил, действующих на шарнир *B***,** т. е. определяем сумму проекций всех сил системы на ось *x* и *y*.

$$\sum F_x = -R_1 Cos45^0 + F_2 Cos30^0 = 0. \quad (1)$$

$$\Sigma F_y = R_2 + F_2 \sin 30^0 - F_1 = 0 \quad (2)$$

4. Определяем реакции стержней R_1 и R_2, решая уравнения (1),(2). Из уравнения (1):

$$R_1 = \frac{F_2 Cos30^0}{Cos45^0} = \frac{100 \cdot 0,866}{0,707} = 122,6 \text{ кН.}$$

а) б) в)

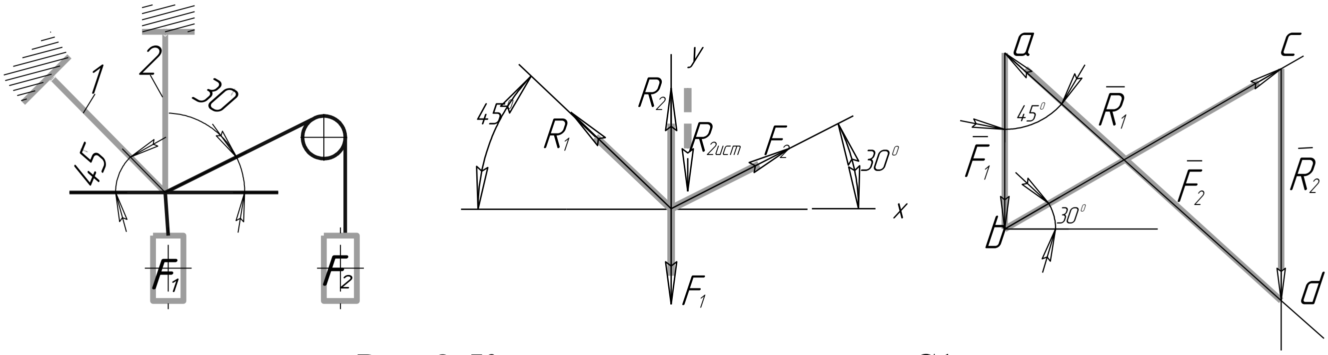


Рис. 8. К примеру решения задачи С1

Подставляем найденное значение R_1 в уравнение (2) и получаем:

$R_2 = F_1 - F_2 \, Sin\ 30° — R_l \, Sin\ 45° = 70 — 100 \cdot 0{,}5 — 122{,}6 \cdot 0{,}707 = –66{,}6$ *кН.*

Знак **минус** перед значением R_1 указывает на то, что первоначально выбранное направление реакции R_2—следует направить в противоположную сторону, т.е. к шарниру *В* (на рис. 2,б истинное направление реакции R_2 показано штриховым вектором). Таким образом, второй шарнир работает на сжатие.

5. Проверяем правильность полученных результатов, решая задачу графически (рис. 8,в). Полученная система сил (рис. 8,б) находится в равновесии, следовательно, равнодействующая данной системы сил равна нулю.

$$\overline{R} = \overline{F_1} + \overline{F_2} + \overline{R_1} + \overline{R_2} = 0.$$

И поэтому, силовой многоугольник, построенный для этой системы сил, должен быть замкнутым.

Строим силовой многоугольник в следующем порядке (рис. 8,в):

а) в выбранном масштабе (например, $\mu_{сил}$ = 2 кН/мм) откладываем заданную силу F_1 ($a\vec{b} = \vec{F}_1$),

б) затем из точки ***b*** под углом 30° к горизонту откладываем силу F_2 ($b\vec{c} = \vec{F}_2$),

в) далее из точек ***а*** и ***с*** проводим прямые, параллельные положениям стержней 1 и 2. Эти прямые пересекаются в точке ***d*** и в результате построения образуется замкнутый многоугольник ***abcd***, в котором сторона $c\vec{d} = \vec{R}_1$, а сторона $\vec{d}a = \vec{R}_2$.

Измерив длины этих сторон (в мм) и умножив на масштаб построения $\mu_{сил}$, получаем значения реакций стержней:

$R_2 = cd * \mu_{сил} = 33 \cdot 2 = 66$ кН

$R_1 = da * \mu_{сил} = 61 \cdot 2 = 122$ кН.

Графическое решение подтверждает правильность первого решения.

Задача С2. Определение реакций опор твердого тела

Для заданных балок и рам (рис. 9) определить опорные реакции. Данные своего варианта взять из таблицы 2, а номер схемы в соответствии с последней цифрой варианта.

Таблица 2. К задаче С2

№ варианта	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**
a, м	1	1	1	2	2	2	1	1	1	2
q, Н/м	5	5	5	10	10	10	5	5	5	5
№ варианта	**11**	**12**	**13**	**14**	**15**	**16**	**17**	**18**	**19**	**20**
a, м	2	2	2	1	1	1	2	2	2	1
q, Н/м	5	5	5	10	10	10	5	5	5	10
№ варианта	**21**	**22**	**23**	**24**	**25**	**26**	**27**	**28**	**29**	**30**
a, м	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2
q, Н/м	4	4	4	6	6	6	3	3	3	7

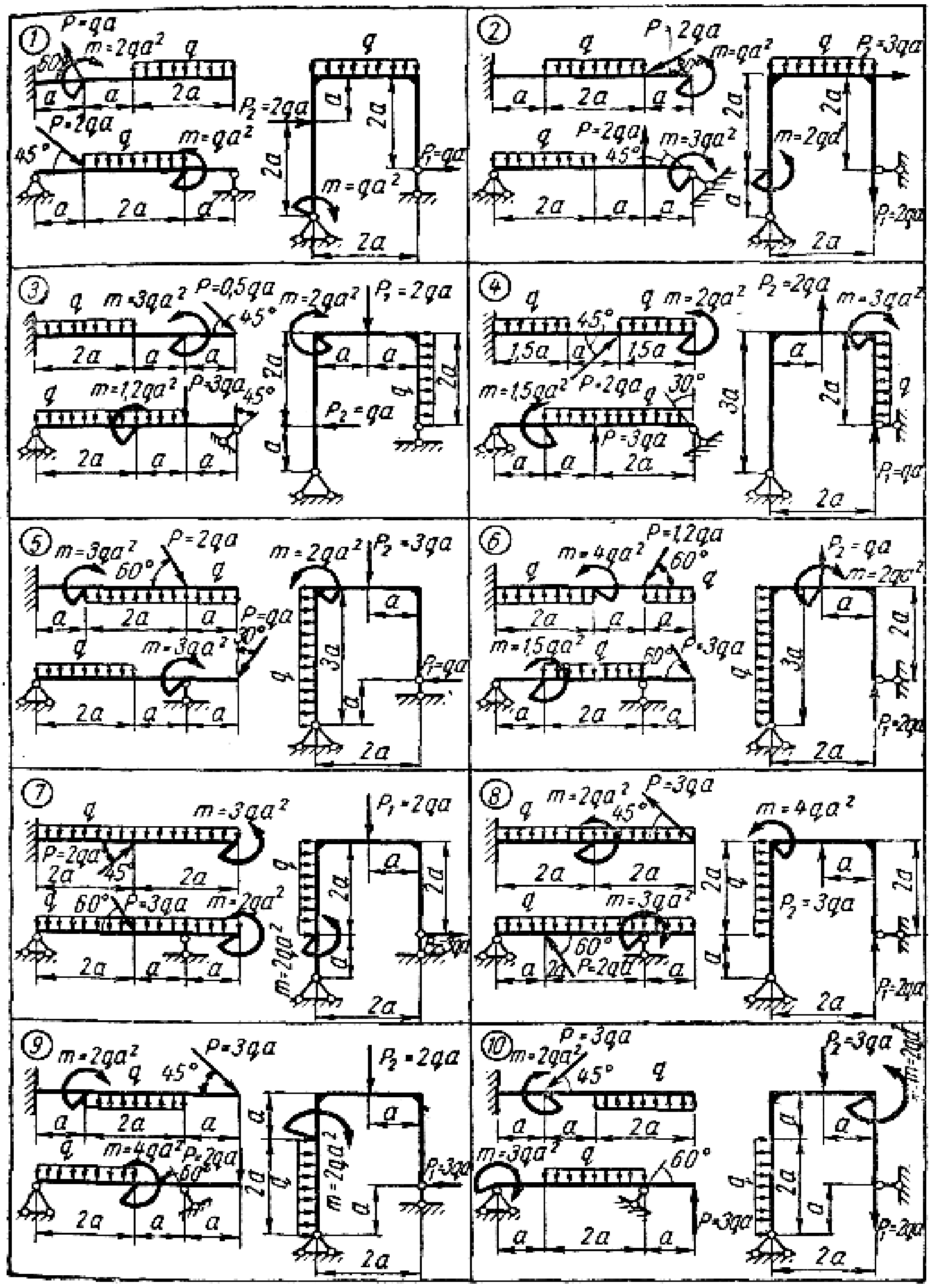
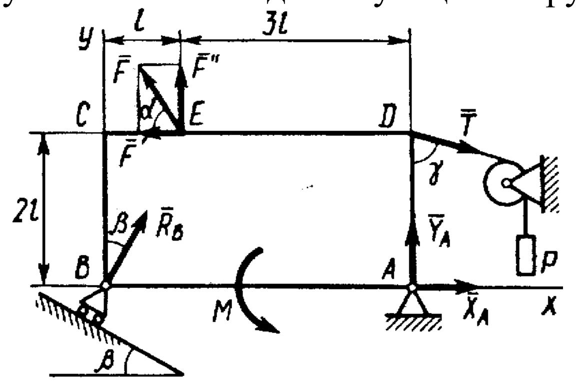


Рис. 9. К задаче С2

Пример решения задачи С2. Жесткая пластина *ABCD* (рис. 10) имеет в точке *A* неподвижную шарнирную опору, а в точке *B* - подвижную шарнирную опору на катках. Все действующие нагрузки и размеры показаны на рисунке.



Дано: F = 25 кН, α = 60°, P = 18 кН, γ = 75°, M = 50 кН · м, β=30°, l= 0,5 м.

Определить: реакции в точках *A* и *B,* вызываемые действующими нагрузками.

Рис. 10. К примеру решения задачи С2

Решение. 1. Рассмотрим равновесие пластины. Проведем координатные оси *XY* и изобразим действующие на пластину силы:

а) активные силы (нагрузки): силу $\overline{F}$ и пару сил с моментом *M*;

б) реакции связей:

- в точке А связью является неподвижная шарнирная опора, ее реакцию изображаем двумя составляющими $\overline{X}_A, \overline{Y}_A$, параллельными координатным осям;
- в точке В связью является подвижная шарнирная опора на катках, ее реакция направлена перпендикулярно плоскости опоры катков;
- в точке D связью является трос, реакция троса $\overline{T}$ направлена вдоль троса от пластины (по модулю *T = P).*

2. Для полученной плоской системы сил составим три уравнения равновесия. При вычислении момента силы $\overline{F}$ относительно точки *A* разложим силу $\overline{F}$ на составляющие $\overline{F}', \overline{F}''(F' = F\cos\alpha, F'' = F\sin\alpha)$ и учтем, что

$m_A(\overline{F}) = m_A(\overline{F}') + m_A(\overline{F}'')$. Получим

$$\sum F_{kx} = 0, \quad X_A + R_B \sin 30^\circ - F\cos 60^\circ + T\sin 75^\circ = 0, \qquad (1)$$

$$\sum F_{ky} = 0, \quad Y_A + R_B \cos 30^\circ + F\sin 60^\circ - T\cos 75^\circ = 0, \qquad (2)$$

$$\sum m_A(\overline{F}_k) = 0, \quad M - R_B \cos 30^\circ \cdot 4l + F\cos 60^\circ \cdot 2l - F\sin 60^\circ \cdot 3l - T\sin 75^\circ \cdot 2l = 0. \qquad (3)$$

Решение системы уравнений начинаем с уравнения (3), так как оно содержит одну неизвестную R_B:

$$R_B = \frac{M + F\cos 60^\circ \cdot 2l - F\sin 60^\circ \cdot 3l - T\sin 75^\circ \cdot 2l}{\cos 30^\circ \cdot 4l} =$$

$$= \frac{50 + 25\cdot\cos 60^\circ \cdot 2\cdot 0.5 - 25\sin 60^\circ \cdot 3\cdot 0.5 - 18\sin 75^\circ \cdot 2\cdot 0.5}{\cos 30^\circ \cdot 4\cdot 0.5} = 7.3\,\text{кН}.$$

Подставляем R_B в уравнение (1):

$$X_A = -R_B \sin 30^\circ + F\cos 60^\circ - T\sin 75^\circ =$$

$$= -7.3\cdot\sin 30^\circ + 25\cdot\cos 60^\circ - 18\cdot\sin 75^\circ = -8.5\ \text{кН}.$$

Подставляем R_B в уравнение (2):

$$Y_A = -R_B\cos 30^\circ - F\cos 60^\circ + T\cos 75^\circ =$$

$$= -7.3\cdot\cos 30^\circ - 25\cdot\cos 30^\circ + 18\cdot\cos 75^\circ = -23.3\,\text{кН}.$$

Проверка. Составим, например, уравнение $\sum m_B(\overline{F}_k) = 0$ (или уравнение моментов относительно любой другой точки (кроме А). Если задача решена верно, то эта сумма моментов должна быть равна нулю.

$$\sum m_B(\overline{F}_k) = M + Y_A\cdot 4l - T\cos 75^\circ\cdot 4l - T\sin 75^\circ\cdot 2l + F\cos 60^\circ\cdot 2l + F\sin 60^\circ\cdot l =$$

$$= 50 + (-23.3)\cdot 2 - 18\cos 75^\circ\cdot 2 - 18\sin 75^\circ\cdot 1 + 25\cos 60^\circ\cdot 1 + 25\sin 60^\circ\cdot 0.5 = 0.$$

Ответ: X_A = -8,5 кН, Y_A = -23,3 кН, R_B = 7,3 кН. Знаки указывают, что составляющие реакции шарнира $\overline{X}_A$ и $\overline{Y}_A$ направлены противоположно показанным на рис. 10.

Тема 2. Кинематика

Кинематикой называется раздел механики, в котором изучается движение материальных тел в пространстве с геометрической точки зрения, вне связи с силами, определяющими это движение.

Слово «кинематика» происходит от греческого слова «кинема», что значит движение. «Движение», рассматриваемое в самом широком смысле слова, есть происходящие во Вселенной изменения и процессы, начиная от простого перемещения и кончая мышлением. «Материя без движения так же немыслима, как движение, и движущаяся материя не может двигаться иначе, как в пространстве и во времени» (Энгельс). Таким образом, всякое движение происходит в пространстве и во времени. Движение и материя существуют вечно и не могут быть ни созданы, ни уничтожены.

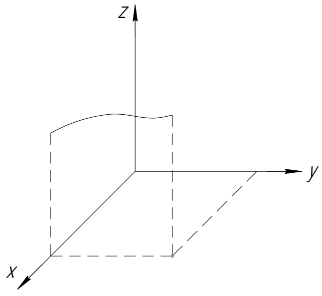
В теоретической механике изучается простейшая форма движения материи – механическое движение, т.е. происходящее во времени и в пространстве изменение положения одного тела относительно другого, с которым связана система координат, называемая системой отсчета.

Систему отсчета можно связать с любым телом. Эта система может быть движущейся и условно неподвижной.

При изучении движений на Земле за условно неподвижную систему отсчета обычно принимают систему осей, неизменно связанных с Землей.

Тело, положение которого по отношению к выбранной системе отсчета не изменяется, находится в состоянии относительного покоя по отношению к этой системе. Время предполагается во всех системах отсчета одинаковым и не зависящим от движения одной системы по отношению к другой. Оно рассматривается как непрерывно изменяющаяся величина и обозначается t. За единицу времени принимается $1 сек = \frac{1}{24 \times 3600}$ средних солнечных суток.

Представления древнего мира о движении ограничивались равномерным движением и его скоростью, как $\frac{S}{t}$. В эпоху Возрождения уточнилось представление о неравномерном движении и криволинейном. Впервые понятие ускорения было введено Галилеем и обобщено для случая криволинейного движения голландским физиком Гюйгенсом. Он первый применил разложения ускорения на оси. Быстрое развитие техники в начале XIX века, особенно машиностроения, потребовало исследования геометрических свойств движения тел. Кинематика выделилась в самостоятельный раздел, причем особое значение приобрела кинематика механизмов.

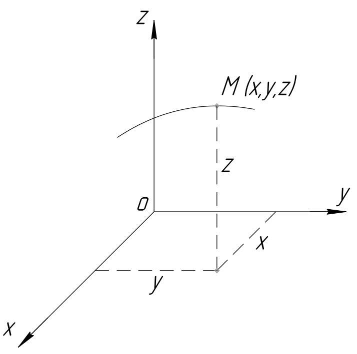


2.1. Траектория движения. Виды траектории.

Движущаяся точка описывает в пространстве некоторую линию. Эта непрерывная линия, описываемая движущейся точкой в пространстве, называется траекторией движения точки. По виду траектории все движения точки делятся на прямолинейные и криволинейные.

Изучение движения точки заключается в определении основных характеристик этого движения: положения точки в выбранной системе отсчета, а также ее скорости и ускорения в любой момент времени. Эта задача решается различными методами. Существуют три способа движения точки: естественный, векторный и координатный.

2.2. Координатный способ задания движения точки. Уравнение движения точки в декартовых координатах



Положение точки M в системе отсчета $OXYZ$ определяется тремя декартовыми координатами точки z, y, z. При движении точки M ее координаты изменяются с течением времени. Следовательно, координаты x, y, z являются функциями времени:

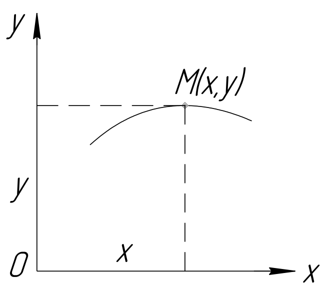
$$\begin{cases} x = f_1(t) \\ y = f_2(t) \\ z = f_3(t) \end{cases}$$

Эти уравнения называются уравнениями движения точки в декартовых координатах.

Эти уравнения вполне определяют движение точки, т.е. для каждого момента времени t найти соответствующие координаты x, y, z и по ним определить положение точки в пространстве в этот момент времени.

Движение точки M в одной плоскости определяется двумя уравнениями движения:

$$\begin{cases} x = f_1(t) \\ y = f_2(t) \end{cases}$$



Прямолинейное движение точки M определяется одним уравнением движения:

$$x = f(t)$$

Уравнения движения, определяющие координату x, y, z, в любой момент времени, можно рассматривать как параметрические уравнения траектории. При исключении параметра t из уравнений движения получаются уравнения траектории, связывающие координаты его точек.

Пусть уравнения движения имеют вид:

$$\begin{cases} x = f_1(t) \\ y = f_2(t) \\ z = f_3(t) \end{cases}$$

Решив 1-ое уравнение относительно t, получим:

$$t = \varphi(t)$$

Подставив полученное для t выражение в 2 другие, получим два уравнения траектории точки:

$$\begin{cases} y = f_2[\varphi(x)] \\ z = f_3[\varphi(x)] \end{cases}$$

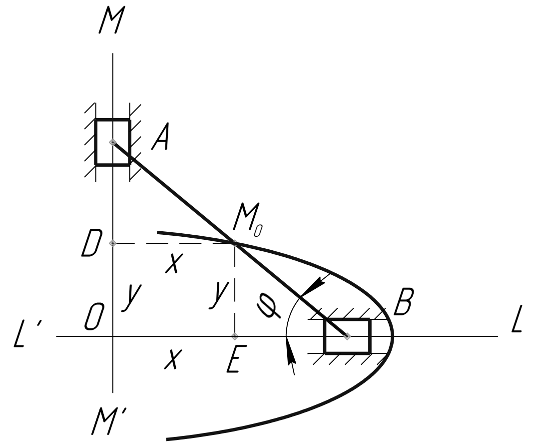
Как известно, линии в пространстве соответствуют 2 уравнения с 3-мя координатами. Пусть движение точки M в плоскости задано уравнениями.

$$\begin{cases} x = f_1(t) \\ y = f_2(t) \end{cases}$$

Исключая параметр t: $t = \varphi(x)$, получим 1-ое уравнение траектории: $y = f_2[\varphi(x)]$

Помимо декартовых координат для определения положения точки на плоскости и в пространстве, применяют полярные, цилиндрические, сферические координаты.

Пример 1. Концы линейки AB движутся по двум взаимно $\perp$ прямым $L'L$ и $M'M$, причем угол $OBA = \varphi$, изменяется пропорционально времени, т.е. $\varphi = \omega t$. Составить уравнение движения точки M_0, находящейся от концов линейки на расстояниях: $AM_0 = a$; $BM_0 = b$ и определить ее траекторию. Предположим, что $M_0D = AM_0$; $M_0B = M_0E$. Прямые $L'L$ и $M'M$ примем за оси координат. Из точки M_0 опустим $\perp$ на оси.



$$\begin{cases} x = M_0D = a \cdot \cos\varphi \\ y = M_0E = b \cdot \sin\varphi \end{cases}$$

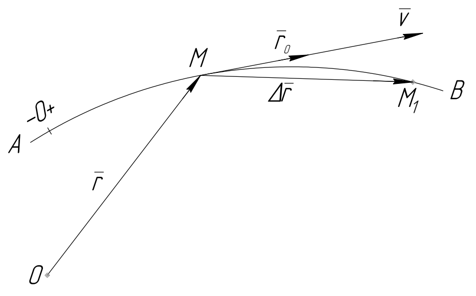
$$\begin{cases} \cos\omega t = \dfrac{x}{a} \\ \sin\omega t = \dfrac{y}{b} \end{cases}$$

Для определения траектории точки M исключаем из уравнений время t:

$\dfrac{x^2}{a^2} = \cos^2\omega t$; $\dfrac{y^2}{b^2} = \sin^2\omega t$ $\Rightarrow$ $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$

Полученное уравнение траектории точки M_0 является уравнением эллипса с полуосями a и b с центром в начале координат. При изменении положения точки M_0 на линейке изменится форма эллипса. На этом принципе устроен эллипсограф – прибор для вычерчивания эллипсов.

2.3. Определение скорости точки при задании ее движения естественным способом. Проекции скорости на касательную к траектории.



Определим скорость точки, когда известна траектория движения AB, начало и направление дуговой координаты и уравнение движения $S = f(t)$. Пусть в момент времени t точка занимает положение M, а при $t_1 = t + \Delta t$ – положение M_1. Дуговая координата этих точек имеет следующее значения:

$$S = OM;\ S_1 = OM_1;\ OM_1 = OM + \overset{\smile}{MM_1} = S + \Delta S$$

где $\Delta S = \overset{\cup}{MM_1}$ – приращение дуговой координаты. Из точки O_1 в точку M проведем радиус-вектор $\vec{r}$ и определим скорость точки в момент t по формуле:

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt}$$

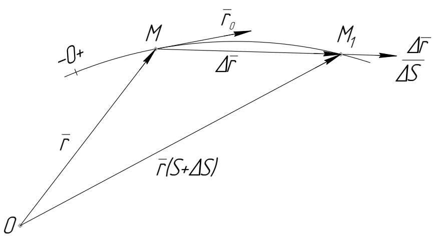
Введем в качестве промежуточной переменной дуговую координату – S, от которой зависит радиус-вектор движущейся точки. Действительно, каждому значению S соответствует определенное значение $\vec{r}$, т.е. $\vec{r}$ можно рассматривать не только функцию времени, но и S.

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{ds} \cdot \frac{ds}{dt}$$

$\frac{d\vec{r}}{ds} = \lim\limits_{\Delta S \to o} \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta S}$, вектор $\frac{\Delta \vec{r}}{\Delta S}$ направлен также, что и $\Delta \vec{r}$. При $\Delta S \to 0$ его направление стремится к направлению касательной, проведенной в точке M в сторону увеличения дуговой координаты S. Модуль этого вектора стремится к 1.

$$\lim_{\Delta S \to 0} \left| \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta S} \right| = \lim_{M_1 \to M} \left| \frac{\overrightarrow{MM_1}}{\overset{\cup}{MM_1}} \right| = 1$$

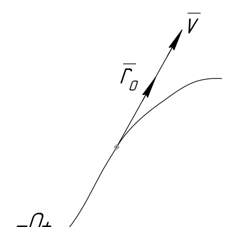
$\left| \frac{d\vec{r}}{dS} \right| = 1$ и направлен по касательной к кривой в сторону увеличения дуговой координаты. Вектор $\frac{d\vec{r}}{dS}$ является ортом этого направления. Обозначим этот орт $\vec{r}_0$;



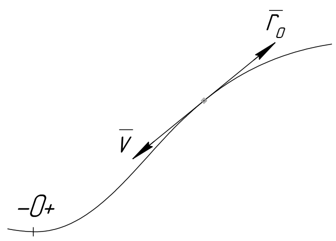
$\vec{r}_0 = \frac{d\vec{r}}{dS}$; тогда $\vec{v} = \vec{r}_0 \cdot \frac{dS}{dt}$

Производная $\frac{dS}{dt}$ есть проекция вектора скорости на касательную, т.е. определяет алгебраическую величину скорости. Условимся $\vec{r}_0$ выбирать в направлении возрастания дуговой координаты. При этом: а) $\frac{dS}{dt} > 0$, функция S возрастает. Точка движется в сторону возрастания S. $\vec{v}$ совпадает с $\vec{r}_0$.

а)



б) $\frac{dS}{dt} < 0$



Модуль вектора скорости равен $v = \left| \frac{dS}{dt} \right|$, т.о. модуль вектора скорости равен абсолютной величине производной от дуговой координаты точки по времени.

а) $\frac{dS}{dt} > 0$; $v = \left| \frac{dS}{dt} \right| = \frac{dS}{dt}$;

$\vec{v} = \vec{r}_0 \cdot v$

б) $\frac{dS}{dt} < 0$; $-v = -\left| \frac{dS}{dt} \right| = \frac{dS}{dt}$;

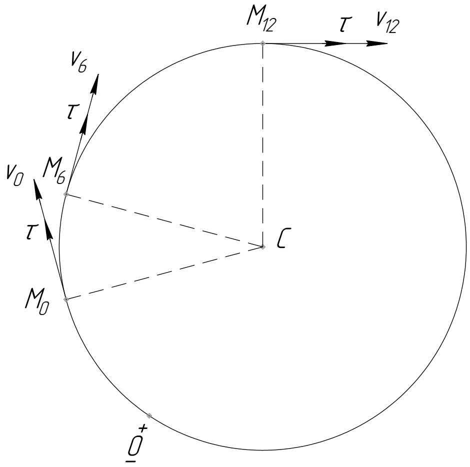
$\vec{v} = -\vec{r}_0 \cdot v$

Пример. Точка движется по окружности радиусом $R = 150\,см$ согласно уравнению: $S = 50 + 6t + \frac{1}{12}t^3$. ($t$ - в секундах; S - в сантиметрах).

Определить: 1) среднюю скорость точки за первые 6 секунд отсчитанной от начала момента.

2) скорость точки в конце 6-ой и 12-ой секунды.

3) дуговую координату точки, при которой скорость 10 $см/сек$



Решение: дуговая координата возрастает:

1) $t = 0$ $\quad S_0 = 50\,см$

$t = 6$ $\quad S_6 = 50 + 6 \cdot 6 + \frac{1}{12} \cdot 6^3 = 104\,см$

$S_{0,6} = 104 - 50 = 54\,см = \sigma_{0,6} = M_0M_6 = S_6 - S_0$

$v_{ср} = \frac{54}{6} = 9\,см/с = v_{ср\,0,6} = \frac{v_{0,6}}{6}$

$t = 12$ $\quad S_{12} = 50 + 6 \cdot 12 + \frac{1}{12} \cdot 12^3 = 266\,см$

$\sigma_{6,12} = M_6M_{12} = S_{12} - S_6 = 266 - 104 = 162\,см$

$\frac{\sigma_{0,6}}{6} = v_{ср\,6,12} = \frac{162}{6} = 27\,см/с$

2) Находим модуль скорости в любом направлении:

$$v = \frac{dS}{dt} = 6 + \frac{1}{4}t^2$$

При $t = 6\,с$

$$v_6 = 6 + \frac{1}{4} \cdot 36 = 15\,см/с$$

При $t = 12\,с$

$$v_{12} = 6 + \frac{1}{4} \cdot 144 = 42\,см/с$$

Точка движется в положительном направлении отсчета дуговой координаты, поэтому точки v_6 и v_{12} направлены также как орты τ. Средняя скорость точки $v_{ср\,6-12} = 27\,см/с$ за промежуток времени от 6 до 12 секунды не совпадает с полусуммой модулей начальной и конечной скоростей этого промежутка $\frac{v_6 + v_{12}}{2} = \frac{15 + 42}{2} = 28{,}5\,см/с$, т.к. движение точки не является равнопеременным.

3) Определим дуговую координату точки, соответствующую заданной скорости.

$$v = 6 + \frac{1}{4}t^2;\ 10 = 6 + \frac{1}{4}t^2;\ t^2 = 16;\ t = 4с$$

Подставляем в уравнение движения $S_4 = 50 + 6 \cdot 4 + \frac{1}{12} \cdot 4^3 = 79{,}3\,см$

2.4. Определение скорости точки при задании ее движения координатным способом. Проекции скорости точки на неподвижные оси декартовых координат.

Пусть даны уравнения движения:

$$x = f_1(t);\ y = f_2(t);\ z = f_3(t)$$

Обозначим орты осей координат $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$.

Проведем радиус-вектор $\vec{r}$

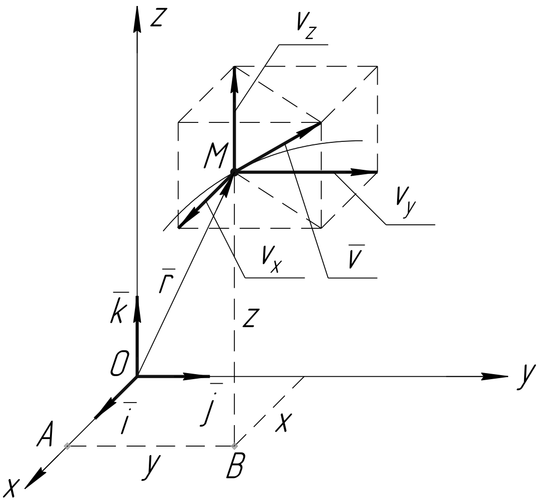
$$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{MB}$$

или: $\vec{r} = \vec{i}x + \vec{j}y + \vec{k}z$, т.к. $\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt}$, найдем производную от радиуса-вектора: считая $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ постоянными и их можно вынести за знак производной.

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{i} \cdot \frac{dx}{dt} + \vec{j} \cdot \frac{dy}{dt} + \vec{k} \cdot \frac{dz}{dt}$$

Построив параллелепипед, можно разложить $\vec{v}$ на составляющие:

$$\vec{v} = \vec{i} \cdot v_x + \vec{j} \cdot v_y + \vec{k} \cdot v_z$$



Анализируя, находим:

$$v_x = \frac{dx}{dt};\ v_y = \frac{dy}{dt};\ v_z = \frac{dz}{dt}$$

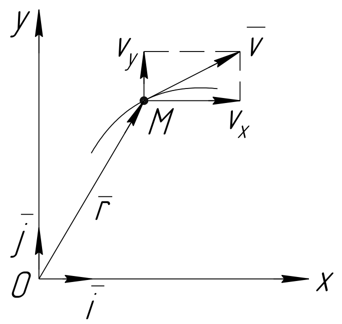
Т.о., проекции скорости точки на неподвижные оси декартовых координат равны первым производным от соответствующих координат точки по времени. Или можно записать:

$$v_x = \dot{x};\ v_y = \dot{y};\ v_z = \dot{z}$$

$$v = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2} = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}$$

Направление вектора определяется по направляющим $\cos$:

$$\cos\left(\widehat{\vec{v};\vec{i}}\right) = \frac{v_x}{v};\ \cos\left(\widehat{\vec{v};\vec{j}}\right) = \frac{v_y}{v};\ \cos\left(\widehat{\vec{v};\vec{k}}\right) = \frac{v_z}{v}$$

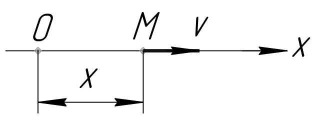


Движение на плоскости задается двумя уравнениями:

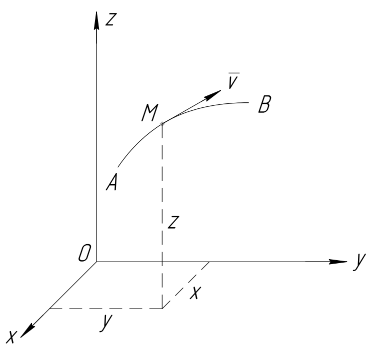
$$\begin{cases} x = f_1(t) \\ y = f_2(t) \end{cases} \qquad v = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2};\ \cos\alpha = \frac{v_x}{v};\ \cos\beta = \frac{v_y}{v}$$

При прямолинейном движении уравнение одно: $M(x, y)$

$$x = f_1(t);\ v = |v_x| = \left|\frac{dx}{dt}\right|$$



При $v_x > 0$ точка движется по направлению x. При $v_x < 0$ противоположно направлению x.



Изобразим траекторию точек AB и её скорость в произвольный момент времени t и годограф скорости CD этой точки.

Проекциям скорости на оси будут

$$\begin{cases} X = v_x = \dot{x} \\ Y = v_y = \dot{y} \\ Z = v_z = \dot{z} \end{cases}$$

2.5. Определение скорости и ускорения точки по заданным уравнениям ее движения.

По заданным уравнениям движения точки М установить вид ее траектории и для момента времени $t = t_1$ (с) найти положение точки на траектории, ее скорость, полное, касательное и нормальное ускорения, а так же радиус кривизны траектории.

Пример выполнения задания. Исходные данные:

$$x = 4t; \quad y = 16t^2 - 1; \qquad (1)$$

$t_1 = 0.5$ (x и y – в см, t и t_1 - в с.)

Решение.

Уравнение движения (1) можно рассматривать как параметрическое уравнение траектории точки. Чтобы получить уравнения траектории в координатной форме, исключим время t из уравнении (1).

Получаем $y = x^2 - 1$, т.е. траекторией точки является парабола, показанная на рис. 12.

Вектор скорости точки

$$\vec{v} = v_x \vec{i} + v_y \vec{j}. \qquad (2)$$

Вектор ускорения

$$\vec{a} = a_x \vec{i} + a_y \vec{j}.$$

Здесь $\vec{i}$ и $\vec{j}$ - орты осей x и y; v_x, v_y, a_x, a_y - проекции скорости и ускорения точки на оси координат.

Найдем их, дифференцируя по времени уравнения движения (1):

$$v_x = \dot{x} = 4\ см/с; \quad a_x = \ddot{x} = 0; \qquad (3)$$

$$v_y = \dot{y} = 32t; \quad a_y = \ddot{y} = 32\ см/с^2;$$

По найденным проекциям определяется модуль скорости:

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} \qquad (4)$$

и модуль ускорения точки:

$$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2}. \qquad (5)$$

Модуль касательного ускорения точки

$$a_\tau = |dv/dt|, \qquad (6)$$

или

$$a_\tau = |\vec{v} \cdot \vec{a} / v|; \qquad (6')$$

$$a_\tau = |(v_x a_x + v_y a_y)/v|; \qquad (6'')$$

dv/dt выражает проекцию ускорения точки на направление ее скорости. Знак «+» при dv/dt означает, что движение точки ускоренное, направление $\vec{a_\tau}$ и $\vec{v}$ совпадают; знак «-» - что движение замедленное.

Модуль нормального ускорения точки

$$a_n = v^2/\rho. \qquad (7)$$

Если радиус кривизны траектории ρ в рассматриваемой точке неизвестен, то a_n можно определить по формуле

$$a_n = |\bar{v} \times \bar{a}|/v. \qquad (8)$$

При движении точки в плоскости формула (8) принимает вид

$$a_n = | v_x a_y \times v_y a_x | / v. \qquad (8')$$

Модуль нормального ускорения можно определить и следующим образом:

$$a_n = \sqrt{a^2 - a_\tau^2}\ . \qquad (9)$$

После того как найдено нормальное ускорение по формулам (8) или (8), радиус кривизны траектории в рассматриваемой точке определяется из выражения

$$\rho = v^2 / a_n\,. \qquad (10)$$

Результаты вычислении по формулам (3) - (6), (8) и (10) для заданного момента времени $t_1 = 0.5$ с приведены в таблице 3.

Таблица 3.

Координаты, см		Скорость, см/с			Ускорение, $см/с^2$					Радиус кривизны, см
x	y	v_x	v_y	y	a_x	a_y	a	a_τ	a_n	ρ
2.0	3.0	4.0	16.0	16.5	0	32.0	32.0	31.0	7.8	35.0

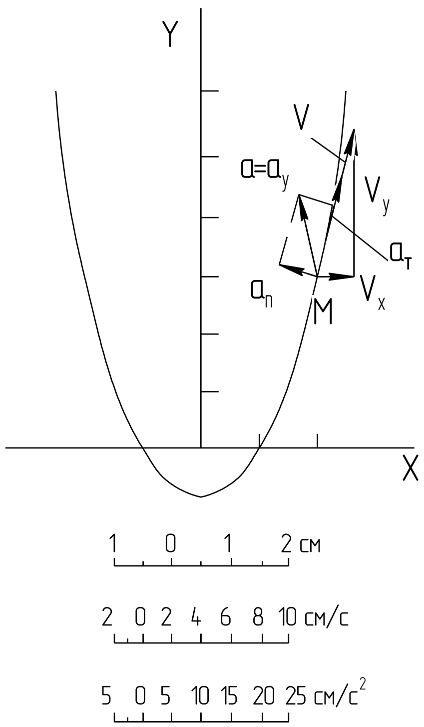


Рис. 12.

На рис. 12 показано положение точки М в заданный момент времени. Вектор $\bar{v}$ строим по составляющим v_x и v_y, причем этот вектор должен по направлению совпадать с касательной к траектории. Вектор $\bar{a}$ строим по составляющим a_x и a_y и затем раскладываем на составляющие a_τ и a_n. Совпадение величин a_τ и a_n, найденных из чертежа, с их значениями, полученными аналитически, служит контролем правильности решения.

Задача К1. Определение скорости и ускорения точки по заданным уравнениям ее движения

Найти уравнение траектории, скорость и ускорение точки, если движение этой точки задано уравнениями в декартовых координатах (табл.4): $x = f_1(t)$, $y = f_2(t)$.

Кроме того, построить положения этой точки и вычислить скорость и ускорение для момента t_1, а также показать на рисунке вид траектории, где x и y заданы в сантиметрах, а t – в секундах.

Таблица 4

№ варианта	x	y	t_1
1	$2Sin^2\frac{\pi}{2}t$	$2Cos^2\frac{\pi}{2}t$	1
2	$2t^2$ -2	$4t$ +4	1
3	$1+Cos\frac{\pi}{4}t^2$	$3+Sin\frac{\pi}{2}t^2$	2
4	$3Sin\ \pi t$	$2Cos\ 2\pi t$	1
5	$2\cdot Sin\frac{\pi}{2}t$	$2\cdot Cos\pi t$	2
6	$6-2Sin\frac{\pi}{4}t$	$6-2Cos\frac{\pi}{4}t$	3
7	$20t^2+5$	$15t^2-3$	1
8	$4t-2t^2$	$1,5t^2-3t$	1
9	$20t$	$245-49t^2$	1
10	$2Cos^2\pi t$	$2Sin^2\pi t$	2
11	$8+2t^2$	$4t-1$	1
12	$5Cos^2\frac{\pi}{4}t$	$2Sin^2\frac{\pi}{4}t$	1
13	$10t$	$20t-5t^2$	1
14	$2Cos\frac{\pi}{4}t$	$Sin\frac{\pi}{2}t$	2
15	t^2-6t	$2,5t$	2
16	$5+3Cos\frac{\pi}{2}t$	$4Sin\frac{\pi}{2}t$	1
17	$10t+5$	$4,9t^2$	1
18	$5t$	$4,9t^2-5$	1
19	$2Cos^2\frac{\pi}{2}t$	$2Sin\ \pi t$	0,5
20	$2Sin\frac{\pi}{2}t$	$2Cos\frac{\pi}{2}t$	0,5

№ варианта	x	y	t_1
21	$2+4Sin^2\dfrac{\pi}{2}t$	$2-2Cos^2\dfrac{\pi}{2}t$	1
22	$2t^2-3$	$4t$	1
23	$8Cos\dfrac{\pi}{4}t^2$	$-2Sin\dfrac{\pi}{2}t^2$	2
24	$3+Sin\ \pi t$	$2+Cos\ 2\pi t$	1
25	$2Cos\dfrac{\pi}{4}t$	$2Sin\dfrac{\pi t}{4}$	2
26	$2Sin^2\dfrac{\pi}{4}t$	$2Cos\dfrac{\pi}{2}t$	3
27	$10t^2+3$	$20t^2-5$	1
28	$8t-2t^2$	$5t^2+2t$	1
29	$20+2t$	$25+9t^2$	1
30	$2+2Cos\pi t$	$2+2Sin^2\pi t$	2
31	$2-3t^2+6t^2$	$3-3t/2-3t^2$	0

Пример расчета К1. Уравнения движения точки в плоскости заданы координатным способом и имеют вид:

$$x = 4\sin\frac{\pi t}{2}, \qquad (1)$$

$$y = 6\cos\frac{\pi t}{2}, \qquad (2)$$

где время t задано в секундах, координаты x, y – в метрах.

Найти: уравнение траектории точки; положение точки на траектории при $t = t_0 = 0$ (начальное положение) и при $t = t_1 = 1/3$ с ; скорость $\bar{V}$ точки; ускорение $\bar{a}$ точки; касательное $\bar{a}_\tau$, нормальное $\bar{a}_n$ ускорения точки и радиус кривизны траектории ρ. В каждом пункте выполнить соответствующие построения на рисунке.

Решение. 1. Найдем уравнение траектории, исключив из (1) и (2) параметр t - время. Способ исключения t зависит от вида функций в правых частях (1), (2). В данном случае найдем из (1), (2) соответственно

$$\sin\frac{\pi t}{2} = \frac{x}{4}, \quad \cos\frac{\pi t}{2} = \frac{y}{6}.$$

Возводя полученные соотношения в квадрат, после этого складывая их и учитывая, что $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$, найдем :

$$\frac{x^2}{4^2} + \frac{y^2}{6^2} = 1.$$

Из этого уравнения следует, что траекторией точки является эллипс, полуоси которого равны 4 м и 6 м, а центр имеет координаты (0, 0).

Выберем масштаб координат и выполним рисунок. Следует заметить, что приведенный рисунок (Рис. К1) имеет вид, соответствующий уже окончанию решения; свой рисунок рекомендуется делать по мере продвижения решения. Это позволяет контролировать получаемые результаты и делает их более наглядными.

2. Находим положение точки при $t = t_0$, подставляя это значение t в (1) и (2):

$$t = t_0 = 0 \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} x = x_0 = 0, \\ y = y_0 = 6 \text{ м.} \end{cases}$$

3. Находим положение точки при $t = t_1$, подставляя это значение t в (1) и (2):

$$t = t_1 = 1/3 \text{ с} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} x = x_1 = 2 \text{ м,} \\ y = y_1 = 3\sqrt{3} \text{ м} \approx 5{,}20 \text{ м.} \end{cases}$$

Указываем на рисунке точки M_0 и M_1, учитывая масштаб координат.

4. Найдем скорость точки. Из теории следует, что при координатном способе задания движения определяются сначала проекции скорости на оси координат. Используя (1) и (2) - уравнения движения точки - находим

$$V_x = \frac{dx}{dt} = \frac{d}{dt}\left(4\sin\frac{\pi t}{2}\right) = 2\pi\cos\frac{\pi t}{2}, \qquad (3)$$

$$V_y = \frac{dy}{dt} = -3\pi\sin\frac{\pi t}{2}. \qquad (4)$$

Модуль скорости $V = \sqrt{V_x^2 + V_y^2}$. Подставляя сюда (3), (4), получим

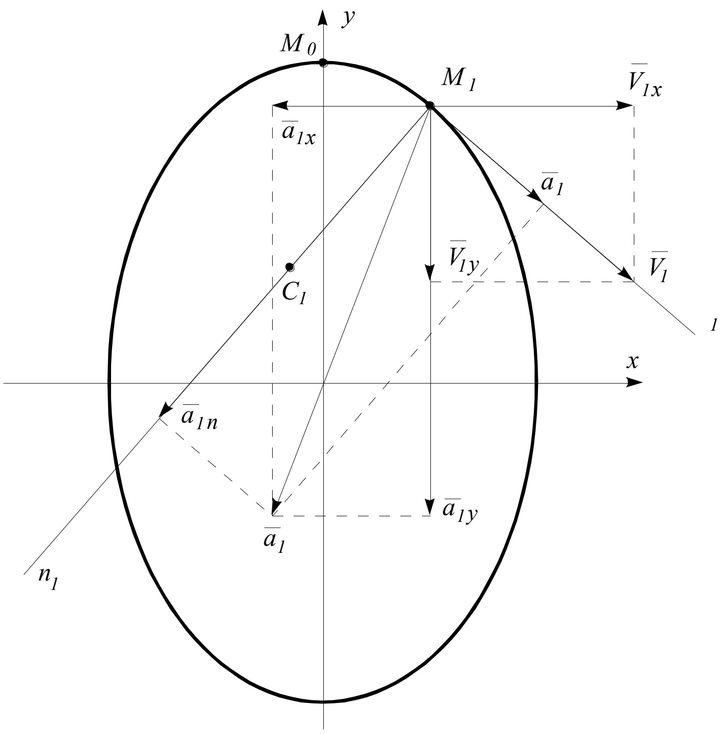
$$V = \sqrt{4\pi^2\cos^2\frac{\pi t}{2} + 9\pi^2\sin^2\frac{\pi t}{2}} = \pi\sqrt{4 + 5\sin^2\frac{\pi t}{2}}. \qquad (5)$$

При $t = t_1 = 1/3$ с: $V_{1x} = \pi\sqrt{3}$ ì/c $\approx 5{,}44$ ì/c, $V_{1y} = -\frac{3\pi}{2}$ м/с $\approx -4{,}71$ м/с,

$$V_1 = \pi\sqrt{21}/2 \text{ м/с} \approx 7{,}20 \text{ м/с}. \qquad (6)$$

Выберем масштаб для скоростей (рис. 13), проведем в точке M_1 линии параллельные осям x и y, и на этих линиях в масштабе скоростей отложим отрезки: 5,44 по оси x и - 4,71 по оси y, что соответствует величинам и знакам найденных проекций вектора скорости. На этих составляющих строим параллелограмм (прямоугольник), диагональ которого по величине и направлению соответствует вектору $\overline{V}_1$. Проверьте следующее: длина построенного вектора должна получиться равной найденному значению $V_1 = \frac{\pi\sqrt{21}}{2}$ м/с $\approx 7{,}20$ м/с (с учетом масштаба скоростей). Вектор $\overline{V}_1$ направлен по касательной к траектории в точке M_1 и показывает направление движения точки по траектории.

В точке M_1 именно сейчас построим естественные оси: касательную τ_1 и главную нормаль n_1 (эти оси потребуются позже). Касательную τ_1 проводим вдоль $\overline{V}_1$; главную нормаль n_1 проводим перпендикулярно τ_1 в плоскости рисунка и направляем к центру кривизны траектории в точке M_1 (в сторону вогнутости траектории).



Масштаб длины: _____ =1м, скорости ___ =1м/с, ускорения: __ =1м/с^2

Рис. 13. К примеру К1.

5. Находим ускорение точки, используя (3), (4):

$$a_x = \frac{d^2x}{dt^2} = \frac{dV_x}{dt} = -\pi^2 \sin\frac{\pi t}{2}\ , \tag{7}$$

$$a_y = \frac{d^2y}{dt^2} = \frac{dV_y}{dt} = -\frac{3\pi^2}{2}\cos\frac{\pi t}{2}\ . \tag{8}$$

Модуль ускорения $a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2}$. Из (7), (8) получим

$$a = \sqrt{\pi^4 \sin^2\frac{\pi t}{2} + \frac{9\pi^4}{4}\cos^2\frac{\pi t}{2}} = \frac{\pi^2}{2}\sqrt{4 + 5\cos^2\frac{\pi t}{2}}\ . \tag{9}$$

Подставляя в (7) - (9) $t = t_1 = 1/3$ с, найдем

$$a_{1x} = -\frac{\pi^2}{2}\ \text{м/с}^2 \approx -4{,}93\ \text{м/с}^2,\ a_{1y} = -\frac{3\sqrt{3}\pi^2}{4}\ \text{м/с}^2 \approx -12{,}8\ \text{м/с}^2,$$

$$a_1 = \frac{\pi^2\sqrt{31}}{4}\ \text{м/с}^2 \approx 13{,}7\ \text{м/с}^2. \tag{10}$$

В точке M_1 строим в масштабе проекции ускорений a_{1x}, a_{1y}, учитывая их величины и знаки, а затем строим вектор ускорения $\bar{a}_1$. Построив $\bar{a}_1$, следует проверить, получилось ли на рисунке $a_1 \approx 13{,}7$ м/с^2 (с учетом масштаба ускорений), и направлен ли вектор $\bar{a}_1$ в сторону вогнутости траектории (вектор $\bar{a}_1$ проходит через центр эллипса, но это есть особенность данной задачи, связанная с конкретным видом функций (1) и (2)).

6. Находим касательное ускорение $\bar{a}_\tau$, характеризующее изменение модуля $\bar{V}$.

Учитывая (5), получим $a_\tau = \dfrac{dV}{dt} = \dfrac{d}{dt}\left(\pi\sqrt{4+5\sin^2\dfrac{\pi t}{2}}\right) = \dfrac{5\pi^2 \sin \pi t}{4\sqrt{4+5\sin^2\dfrac{\pi t}{2}}}$.

При $t = t_1 = 1/3$ с

$$a_{1\tau} = \frac{5\pi^2}{4\sqrt{7}}\ \text{м/с}^2 \approx 4{,}66\ \text{м/с}^2. \qquad (11)$$

Касательное ускорение можно также найти, дифференцируя по времени равенство $\upsilon^2 = \upsilon_x^2 + \upsilon_y^2$. Получим

$2\upsilon\dfrac{d\upsilon}{dt} = 2\upsilon_x\dfrac{d\upsilon_x}{dt} + 2\upsilon_y\dfrac{d\upsilon_y}{dt}$, откуда следует

$$a_\tau = \frac{d\upsilon}{dt} = \frac{\upsilon_x a_x + \upsilon_y a_y}{\upsilon}.$$

Нормальную составляющую a_n ускорения, характеризующую изменение направления $\bar{V}$, можно найти по формуле

$$a_n = V^2/\rho, \qquad (12)$$

если ρ - радиус кривизны траектории заранее известен, или (учитывая, что, $\bar{a}_\tau \perp \bar{a}_n$ и, следовательно, $a^2 = a_n^2 + a_\tau^2$) по формуле

$$a_n = \sqrt{a^2 - a_\tau^2}. \qquad (13)$$

Так как в данной задаче радиус ρ заранее неизвестен, то используем (13). Подставляя (10), (11) в (13), получим

$$a_{1n} = 6\pi^2/\sqrt{21}\ \text{м/с}^2 \approx 12{,}92\ \text{м/с}^2. \qquad (14)$$

Вернемся к рис. 13. Ранее на этом рисунке вектор $\bar{a}_1$ был построен по составляющим $\bar{a}_{1x}$, $\bar{a}_{1y}$. С другой стороны, этот вектор можно разложить на составляющие по естественным осям τ_1 и n_1 (пользуясь правилом параллелограмма). Выполним это разложение и построим на рисунке векторы $\bar{a}_{1\tau}$ и $\bar{a}_{1n}$. Далее следует провести проверку: с учетом масштаба ускорений определить по рисунку величины $a_{1\tau}$, a_{1n} и убедиться, что они совпадают с (11), (14).

Заметим, что движение точки ускоренное, т.к. направления векторов $\bar{V}_1$ и $\bar{a}_{1\tau}$ совпадают (рис. К1).

Найдем радиус кривизны ρ, используя (12), откуда следует, что $\rho = V^2/a_n$. Подставляя в последнее соотношение V_1 и a_{1n} из (6) и (14), получим радиус кривизны траектории в точке M_1: $\rho_1 = 7\sqrt{21}/8$ м ≈ 4 м. Отложим на рисунке от точки M_1 по оси n_1 отрезок M_1C_1 длины ρ_1 (в масштабе длин); полученная точка C_1 есть центр кривизны траектории в точке M_1.

Объединяя полученные результаты, запишем ответ:

1. траектория точки - эллипс, имеющий уравнение $\dfrac{x^2}{4^2}+\dfrac{y^2}{6^2}=1$;

2. $M_0(x_0=0,\ y_0=6$ м);

3. $M_1(x_1=2$ м, $y_1=3\sqrt{3}$ м $\approx 5{,}20$ м);

4. $V_1=\dfrac{\pi\sqrt{21}}{2}$ м/с $\approx 7{,}20$ м/с;

5. $a_1=\dfrac{\pi^2\sqrt{31}}{4}$ м/с^2 $\approx 13{,}7$ м/с^2;

6. $a_{1\tau}=\dfrac{5\pi^2}{4\sqrt{7}}$ м/с^2 $\approx 4{,}66$ м/с^2; $a_{1n}=\dfrac{6\pi^2}{\sqrt{21}}$ м/с^2 $\approx 12{,}92$ м/с^2;

$\rho_1=\dfrac{7\sqrt{21}}{8}$ м ≈ 4 м.

Обсудим некоторые особенности и частные случаи, которые могут встретиться в задачах.

Если траектория точки - прямая линия, то $\rho=\infty$ и, следовательно, $a_n=V^2/\rho=0$. Найденное по величине и направлению ускорение $\bar{a}$ равно ускорению $\bar{a}_\tau$.

Если траектория точки - окружность, то $\rho=R$, где R - радиус окружности (определяется из уравнения траектории). Если скорость V точки найдена, то $a_n=V^2/\rho=V^2/R$. Вектор $\bar{a}_n$ направлен к центру окружности. Касательное ускорение $a_\tau=dV/dt$, полное ускорение $a=\sqrt{a_n^2+a_\tau^2}$.

Тема 1. Статика.
1.1. Основные понятия статики
1.2. Несвободное твердое тело. Связи. Реакции связей.
Задача С1. Пример расчета к заданию С1.
Задача С2. Определение реакций опор твердого тела
Пример решения задачи С2.
Тема 2. Кинематика
2.1. Траектория движения. Виды траектории.
2.2. Координатный способ задания движения точки.
Уравнение движения точки в декартовых координатах
2.3. Определение скорости точки при задании ее движения естественным способом. Проекции скорости на касательную к траектории.
2.4. Определение скорости точки при задании ее движения координатным способом. Проекции скорости точки на неподвижные оси декартовых координат.
2.5. Определение скорости и ускорения точки по заданным уравнениям ее движения.
Задача К1. Определение скорости и ускорения точки по заданным уравнениям ее движения
Пример расчета К1.